



UNIVERSITÉ PARIS-SUD

École doctorale de mathématiques Hadamard (ED 574)

Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Mathématiques

par

Ludovic GOUDENÈGE

Algorithmes numériques pour des problèmes stochastiques

Rapporteurs : GABRIEL JAMES LORD (rapporteur externe)
ANNIE MILLET (rapporteuse externe)
FRANCESCO RUSSO (rapporteur interne)

Date de soutenance : 11 DÉCEMBRE 2018

Composition du jury : ANNE DE BOUARD (examinatrice externe)
PAULINE LAFITTE (examinatrice interne)
GABRIEL JAMES LORD (rapporteur externe)
BERTRAND MAURY (examineur interne)
ANNIE MILLET (rapporteuse externe)
FRANCESCO RUSSO (rapporteur interne)
DENIS TALAY (président du jury)

Liste de publications

Revue à comité de lecture - Articles réalisés en thèse

- [PHD1] Ludovic Goudenège. Stochastic Cahn-Hilliard equation with singular nonlinearity and reflection. *Sto. Proc. Appl.*, 119(10) :3516–3548, 2009.
- [PHD2] Arnaud Debussche et Ludovic Goudenège. Stochastic Cahn-Hilliard equation with double singular nonlinearities and two reflections. *SIAM J. Math. Anal.*, 43(3) :1473–1494, 2011.

Revue à comité de lecture

- [H1] Ludovic Goudenège, Daniel Martin et Grégory Vial. High order finite element calculations for the Cahn-Hilliard equation. *J. Sci. Comput.*, 52(2) :294–321, 2012.
- [H2] Ludovic Goudenège, Aymeric Kalife et Saad Mouti. Managing gap risks in iCPPI for life insurance companies : a risk/return/cost analysis. *Insurance Markets and Companies : Analyses and Actuarial Computations*, 5(2), 2014.
- [H3] Ludovic Goudenège. Numerical methods for piecewise deterministic Markov processes with boundary. *ESAIM*, 45 :338–348, Septembre 2014.
- [H4] Luigi Manca et Ludovic Goudenège. Asymptotic properties of stochastic Cahn-Hilliard equation with singular nonlinearity and degenerate noise. *Sto. Proc. Appl.*, 125(10) :3785–3800, Octobre 2015.
- [H5] Ludovic Goudenège et Pierre-André Zitt. A Wright-Fisher model with indirect selection. *Journal of Mathematical Biology*, 71(6) :1411–1450, Décembre 2015.
- [H6] Ludovic Goudenège, Andrea Molent et Antonino Zanette. Pricing and Hedging GLWB in the Heston and in the Black-Scholes with Stochastic Interest Rate Models. *Insurance : Mathematics and Economics*, 70 :38–57, Septembre 2016.
- [H7] Charles-Edouard Bréhier, Maxime Gazeau, Ludovic Goudenège, Tony Lelièvre et Mathias Rousset. Unbiasedness of some generalized Adaptive Multilevel Splitting algorithms. *Ann. Appl. Probab.*, 26(6) :3559–3601, 2016.
- [H8] Ludovic Goudenège, Andrea Molent et Antonino Zanette. Variable Annuities : New Solution to Long-Term Investment Problem. *Journal Global Policy and Governance*, 5(2) :35-49, Décembre 2016.
- [H9] Christiane Coccozza-Thivent, Robert Eymard, Ludovic Goudenège et Michel Rousignol. Numerical methods for piecewise deterministic Markov processes with boundary. *IMA J. Numer. Anal.*, 37(1) :170–208, 2017.

- [H10] Ludovic Goudenège, Andrea Molent, Xiao, Wei et Antonino Zanette. Fourier-cosine method for pricing and hedging insurance derivatives. *Theoretical Economics Letters*, 8(3) :282–291, Février 2018.
- [H11] Ludovic Goudenège, Andrea Molent et Antonino Zanette. Pricing and hedging GMWB in the Heston and in the Black-Scholes with stochastic interest rate models. *Computational Management Science*, pages 1–32, Mars 2018.

Communications à des congrès, symposium, proceedings

- [C1] Ludovic Goudenège, Robert Eymard, Christiane Coccozza-Thivent et Michel Roussignol. Numerical methods for piecewise deterministic Markov processes with boundary. *Congrès SMAI*, 2013.
- [C2] Charles-Edouard Bréhier, Maxime Gazeau, Ludovic Goudenège et Mathias Rousset. Analysis and simulation of rare events for SPDE. *ESAIM Proceedings*, Janvier 2014.
- [C3] Charles-Edouard Bréhier, Ludovic Goudenège, et Loïc Tudela. Central Limit Theorem for Adaptive Multilevel Splitting Estimators in an Idealized Setting. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 163 :245–260, Juin 2016.

Livres et ouvrages

- [B1] Ludovic Goudenège. *Quelques résultats sur l'équation de Cahn-Hilliard stochastique et déterministe*. Thèse, École Normale Supérieure de Cachan - Antenne de Bretagne, Novembre 2009.
- [B2] Ludovic Goudenège, Mathieu Leroy-Lerêtre et Grégory Vial. *TP d'initiation à L^AT_EX*. École Normale Supérieure de Cachan - Antenne de Bretagne, Mars 2010.
- [B3] Ludovic Goudenège. *Introduction aux équations différentielles stochastiques et équations aux dérivées partielles stochastiques*. Polycopié de cours de CentraleSupélec. 2016.
- [B4] Christiane Coccozza-Thivent et Ludovic Goudenège. *Markov renewal processes Piecewise deterministic Markov processes*. Version française disponible sur internet. 2014. Version anglaise en préparation pour publication. 2018.

Logiciels

- [L1] Bibliothèque FORTRAN de calcul éléments finis MELINA, 2006-2010.
- [L2] Bibliothèque C++ de calcul éléments finis XLIFE++, 2012-2016.
- [L3] Logiciel PREMIA de l'équipe recherche INRIA MathRisk, 2010-2018.

Preprints

- [P1] Charles-Edouard Bréhier, Maxime Gazeau, Ludovic Goudenège, Tony Lelièvre et Mathias Rousset. Unbiasedness of some generalized adaptive multilevel splitting algorithms. *arXiv preprint arXiv :1505.02674*, 2015. Version étendue de la version publiée dans *Annals of Applied Probability*.
- [P2] Charles-Edouard Bréhier et Ludovic Goudenège. Analysis of some splitting schemes for the stochastic Allen-Cahn equation. *arXiv preprint arXiv :1801.06455*, 2018.
- [P3] Charles-Edouard Bréhier et Ludovic Goudenège. Weak convergence rates of splitting schemes for the stochastic Allen-Cahn equation. *arXiv preprint arXiv :1804.04061*, 2018.
- [P4] Luigi Manca et Ludovic Goudenège. Stochastic phase field α -Navier-Stokes vesicle-fluid interaction model. 2018.
- [P5] Ludovic Goudenège, Andrea Molent, et Antonino Zanette. Computing Credit Valuation Adjustment solving coupled PIDEs in the Bates model. *arXiv preprint arXiv :1809.05328*, 2018.
- [P6] Ludovic Goudenège, Adam Larat, Julie Llobell, Marc Massot, David Mercier, Olivier Thomine et Aymeric Vié. Statistical and probabilistic modeling of a cloud of particles coupled with a turbulent fluid. *arXiv preprint arXiv :1810.01173*, 2018.

Remerciements

Avant d'entrer dans le vif du sujet, j'aimerais écrire quelques lignes pour remercier les personnes qui ont compté pour moi durant toutes ces années de mathématiques, des collègues, des amis, la famille, un amour.

Mes premiers remerciements s'adressent à mes trois rapporteurs, Gabriel James Lord, Annie Millet et Francesco Russo. Ils me font le très grand honneur d'avoir exploré en profondeur ce très (trop) long manuscrit d'habilitation. Merci à Gabriel d'avoir tout relu en français, et dont les travaux en approximations numériques sont une de mes références. Merci à Annie pour ces nombreux travaux sur les processus et les EDP stochastiques qui furent notamment mes premières lectures sur le sujet. Merci à Francesco pour sa première relecture attentive du manuscrit, ses remarques m'ont aidé à lui donner sa forme finale.

Merci aussi aux autres membres du jury d'être présents pour la soutenance : Anne De Bouard, Pauline Lafitte, Bertrand Maury et Denis Talay. C'est toujours un plaisir de discuter avec vous, au détour d'une conférence ou d'un café. Merci à Anne pour nos échanges sur les EDP stochastiques, elle est un véritable modèle depuis le début de ma thèse. Merci à Pauline pour son soutien indéfectible et ses conseils extrêmement précieux. Merci à Bertrand que j'ai moins côtoyé mais dont les présentations m'ont souvent inspiré. Merci à Denis qui m'a soutenu au début de ma carrière quand je postulais chez Inria. Il est un de ces scientifiques comme on en fait peu.

Je remercie également tous les collègues avec qui j'ai pu travailler, discuter, écrire, échanger, débattre, rire. Ils forment le cadre dans lequel on se sent bien, et qui nous permet d'avancer, parfois lentement, vers des réponses ou simplement vers d'autres questions. Merci à Luigi, Robert, Christiane, Michel, David, Thierry, Pierre-André, Alain, Jacques, Christiane, Audrey, Pierre, Marie-Noémie, Xavier du LAMA. Merci à Erick, Pauline, Marc, Lionel, Frédéric, Laurent, Céline, Sylvie, Annie, Emmanuelle, Paul-Henry, Christophe, Anna, Benjamin, Charlotte, Frédérique, Adam pour leur accueil à Centrale Paris. Merci à Gautier, Alexandre, Sarah, Xiangtuo, Mahmoud, Chloé, Antonin, Brice, Rémi qui poursuivent l'aventure à CentraleSupélec.

Merci à mes co-auteurs. Travailler avec vous a été un très grand plaisir, et j'espère que nous continuerons encore à œuvrer ensemble. Merci à Arnaud, mon directeur de thèse, qui fut le premier à croire en moi. Merci à Daniel, Grégory, et sans oublier Virginie, pour vos conseils en analyse numérique. Merci à Aymeric pour nos échanges autour de l'assurance et des "variable annuities". Merci encore à Luigi, Pierre-André, Robert, Christiane et Michel qui m'ont ouvert de nouvelles voies de recherche particulièrement intéressantes et novatrices. Merci Christiane pour nos échanges ; tes relectures minutieuses et attentives sont un exemple à suivre. Merci à Charles-Édouard, Maxime, Tony et Matthias pour cette fantastique collaboration au CEMRACS. Merci à Andrea, Antonino et Xiao pour vos approches numériques innovantes. Merci à Marc, David, Adam, Aymeric, Julie et Olivier pour nos échanges sur la modélisation de la turbulence. Merci également à Sébastien, Stella, Flore et Franck, j'espère pouvoir un jour mettre sur papier nos échanges sur Cahn-Hilliard et Navier-Stokes. Un dernier merci particulier à Charles-Édouard et Luigi qui m'épaulent depuis déjà bien longtemps, vous êtes des amis précieux.

Je remercie également mes amis proches et ma famille, ceux qui m'ont soutenu par leur amitié et leur amour. Ils sont là pour les moments durs et les moments de doute, mais ils sont là également pour tout ce qui ne tourne pas autour des mathématiques. Je les remercie de ne pas toujours comprendre ce que je raconte, cela m'aide à mieux formaliser mes idées pour les rendre digestes aux élèves.

Enfin, merci à la plus importante d'entre tous, celle qui partage ma vie sur ces deux aspects : les maths et les non-maths. Rozenn, tu as su croire en moi, en nous, quand tout s'y opposait. Tu es aujourd'hui mon rocher, ma bouteille d'oxygène (toujours sur mon dos). Je t'aime.

Table des matières

Liste de publications	3
Introduction	11
I Étude théorique des équations aux dérivées partielles stochastiques	15
1 Le modèle de Cahn-Hilliard	17
2 Préliminaires	19
2.1 Espaces et bruit	19
2.2 Description des équations non-linéaires	20
2.3 Mesures invariantes	21
3 Résultats principaux	23
3.1 Une seule singularité logarithmique	23
3.2 Mesures de réflexion	25
3.3 Deux singularités logarithmiques	26
3.4 Bruits réguliers et dégénérés	27
4 Simulations numériques de l'équation de Cahn-Hilliard	31
5 Projets et perspectives	33
II Algorithmes stochastiques	37
6 Ordres faibles et forts pour les équations aux dérivées partielles stochastiques de type Allen-Cahn	40
6.1 Ordres faibles et forts	40
6.2 Équations de Kolmogorov	43
6.3 Modèle d'Allen-Cahn	45
6.4 Schémas de splitting	47
6.5 Équations auxiliaires	48
6.6 Analyse de convergence des schémas de splitting	49
6.7 Simulation numériques	53
7 Algorithmes AMS généralisées : GAMS	58
7.1 Simulations d'évènements rares	58
7.2 Un algorithme adaptatif de splitting à plusieurs niveaux	59
7.3 Algorithmes AMS généralisés	61
7.4 Illustrations numériques	63
8 Projets et perspectives	71

III	Algorithmes Déterministes	75
9	Méthodes de différences finies et de volumes finis	79
10	Dynamique de Wright-Fisher	82
10.1	Comportements malveillants et génétique des populations	82
10.2	Limite en grande population	83
11	Le modèle multi-génération	87
11.1	Le modèle classique de Wright-Fisher avec sélection	87
11.2	Un modèle de Wright-Fisher avec sélection indirecte	88
11.3	Principales idées de la démonstration vers la diffusion limite	90
12	Modèles en finance et en assurance	93
12.1	Modèles de Black-Scholes, Hull-White, Heston et Lévy	94
12.2	Variable annuités	96
13	Portefeuilles d'assurance à proportion constante	98
13.1	Description du mécanisme des CPPI	98
13.2	Contrôler le risque de chute du cours	99
14	Les contrats GLWB et GMWB	103
14.1	Le contrat GLWB	104
14.2	Le contrat GMWB	105
15	Méthodes numériques pour la simulation	107
15.1	Méthode ADI : "Alternating Direction Implicit"	110
15.2	Résultats numériques	113
16	Processus de Markov déterministes par morceaux	115
16.1	PDMP avec frontière	115
16.2	Un schéma volumes finis	121
16.3	Tension et finitude	124
16.4	Analyse de convergence	125
16.5	Illustration numérique	125
17	Projets et perspectives	129
	Index	134
	Références	135

Résumé

Ce mémoire présente l'ensemble de mes recherches publiées ou en cours de publication. Il mêle des résultats obtenus en théorie des équations aux dérivées partielles, en analyse numérique, en théorie des probabilités et en statistiques, avec des cadres d'applications dans les domaines des champs de phase, de la biologie, de la finance, de l'assurance et de la fiabilité.

Le fil rouge de ce mémoire est l'obtention d'algorithmes numériques pour résoudre des problèmes issus du monde de l'aléatoire. On montrera comment les résultats théoriques orientent l'implémentation des méthodes numériques, et comment les méthodes numériques permettent d'appréhender des techniques de démonstrations innovantes.

Introduction

On compare souvent la cuisine, et plus particulièrement la science exacte de la pâtisserie, à cette science logique et implacable qu'est la mathématique. Pourquoi ? Tout simplement parce que la pâtisserie supporte très mal les approximations. Saviez-vous qu'on ne mesure pas les ingrédients secs ou gras dans les mêmes instruments que les ingrédients liquides ? Et qu'il faut 225 grammes de sucre glace pour fabriquer 70 macarons ?

J'aime à penser que c'est parce qu'en pâtisserie la recette fait foi, en ce sens qu'elle a subi tellement d'optimisations à travers les âges qu'aujourd'hui on ne peut plus s'en écarter sans risquer de grosses erreurs. Ma grand-mère se le permettrait peut-être, mais je ne m'y risquerai pas. Une machinerie si bien huilée (on doit huiler la tasse si on souhaite l'utiliser pour mesurer un volume de miel), qu'on pourrait presque assimiler les quantités d'ingrédients à des hypothèses, qui ne mènent au bon résultat que si elles sont respectées scrupuleusement.

Le parallèle avec la démonstration me paraît évident. On construit une démonstration, comme on construit une recette. On en connaît les grandes lignes, les ingrédients de base. On a parfois en tête la recette d'un collègue, qui réalisa une démonstration similaire, mais on n'a pas les ingrédients sous la main, alors il faut improviser, et souvent cela ne fonctionne pas. Et petit à petit, on comble les trous, on retire des ingrédients qui n'étaient pas essentiels, on en échange contre des ingrédients similaires mais plus appropriés. Bref, on construit sa recette. Et puis après, il faut la transmettre. Alors on en rédige les grandes lignes qu'on met par écrit, qu'on publie. Parfois on omet ou on oublie de raconter pourquoi tel ingrédient n'a pas fonctionné, car le principal c'est la recette : les hypothèses, la démonstration et le résultat.

Dans ce mémoire, je voulais présenter mes recettes et les idées que j'ai explorées. Je voulais en décrire les hypothèses et les résultats, mais sans les démonstrations qui sont bien trop longues pour être rapportées sur un petit nombre de pages. Ainsi, en tentant de les organiser en un flot digeste, aux néophytes comme aux experts, il m'est apparu un fil rouge. Dans chacune de mes publications, il existe une recette, une méthode, un **algorithme**, qui, s'il est bien suivi, mène au résultat.

Dans la première partie de ce mémoire, je présenterai des résultats théoriques obtenus dans le cadre des équations aux dérivées partielles, notamment pour le modèle de Cahn-Hilliard. Ces résultats découlent tous d'une méthode d'approximation, par la pénalisation d'une contrainte violée, par la régularisation polynomiale ou lipschitzienne d'une non-linéarité singulière ou simplement par la projection sur un espace de dimension finie.

Je montrerai comment mes tentatives de caractériser une mesure de réflexion pour une singularité logarithmique, m'ont permis d'aborder des singularités en puissances négatives. J'expliquerai pourquoi les approximations polynomiales des singularités m'ont permis de mettre au point une étude des potentiels d'énergie, ou comment la technique de démonstration de l'existence d'une mesure de réflexion m'a suggéré un **algorithme numérique** pour la simuler sur ordinateur. C'est d'ailleurs la simulation numérique qui mit en évidence l'existence du nombre maximal, fini et petit, de points contacts que la solution peut avoir avec la barrière physique.

Ce nombre de points de contacts était caractéristique des ponts de Bessel dans les

travaux de Lorenzo Zambotti. Et c'est cette analogie qui me suggéra de construire un processus représentatif du terme de bord dans la formule d'intégration par parties pour l'équation aux dérivées partielles de Cahn-Hilliard avec une singularité en 0.

L'aller-retour existant entre les simulations numériques et les démonstrations ne s'arrête pas là. Alors que je tente de simuler les solutions des équations aux dérivées partielles de Cahn-Hilliard avec une non-linéarité logarithmique, il m'apparaît que la représentation du processus de Wiener cylindrique ne nécessite pas, comme on pourrait le penser, de représenter tous les modes d'excitation. Et c'est bien pratique, car, après tout, l'ordinateur est un objet avec une quantité finie de mémoire et on aurait bien du mal à représenter un objet, construit comme la limite d'une série, qui de plus n'est pas convergente dans le bon espace de Hilbert. Avec Luigi Manca, je me lance donc dans la démonstration de la quantification du nombre de modes nécessaires pour obtenir une mesure invariante. Je cherche un moyen simple de quantifier l'ordre de troncature de la série qui est nécessaire pour une simulation consistante avec le modèle. Les résultats sont surprenants.

Gérard Berry écrit : "Un algorithme, c'est tout simplement une façon de décrire dans ses moindres détails comment procéder pour faire quelque chose. Il se trouve que beaucoup d'actions mécaniques, toutes probablement, se prêtent bien à une telle décortication. Le but est d'évacuer la pensée du calcul, afin de le rendre exécutable par une machine numérique (ordinateur...). On ne travaille donc qu'avec un reflet numérique du système réel avec qui l'algorithme interagit."

De là à imaginer que tout est fait pour qu'on travaille avec un ordinateur sous la main, il n'y a qu'un pas.

Je cherche donc à mettre aux points des **algorithmes numériques** pour représenter le plus fidèlement les solutions des équations aux dérivées partielles stochastiques. Je suis alors au Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées de l'Université Paris-Est - Marne-la-Vallée. Mon bureau se trouve dans un bâtiment situé juste en face de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, où je fais la connaissance de Tony Lelièvre et Mathias Rousset. Ensemble nous souhaitons réaliser l'étude de techniques d'échantillonnage pour des systèmes en grande dimension. Ce sont les équations aux dérivées partielles stochastiques que j'ai en tête, alors que ce sont les dynamiques de Langevin qui intéressent mes collègues. Nous tombons d'accord sur un modèle qui a la propriété d'être dans les deux classes : c'est l'équation d'Allen-Cahn. Je connaissais déjà très bien cette équation, grande sœur de l'équation de Cahn-Hilliard, dont les simulations numériques semblaient plus simples à réaliser.

Cette simplicité va nous permettre, à Charles-Édouard Bréhier, Maxime Gazeau, David Iampietro, Tony Lelièvre, Mathias Rousset et moi-même, de continuellement tester nos intuitions mathématiques sur des résultats numériques. Durant ce long processus, où la machine suggère des idées, et où on lui en soumet de nouvelles, que parfois elle accepte, mais qu'elle rejette aussi très souvent, nous mettons au point une version non-biaisée de l'**algorithme** connu sous le nom d'AMS ("Adaptive Multilevel Splitting") : un algorithme de gestion de répliques en interaction, qui indique quelles sont les répliques qui doivent être détruites, au profit de celles qui doivent être dupliquées.

Il a fallu transcrire les paradoxes, mis en lumière par les simulation numériques, en équations, en hypothèses et en étapes cruciales de l'algorithme. Le vocabulaire de l'algo-

rithme a dû s'adapter. On parlait du “nombre” de répliques détruites, on parle désormais du “nombre minimal” de répliques détruites, car ce nombre n'a pas la liberté de rester fixe, il doit pouvoir varier pour éviter des cas pathologiques. On met également en évidence des cas d'extinction de la population de répliques (toutes les répliques sont détruites à une certaine étape), un cas qui était supposé être de probabilité nulle (ou en tout cas notre intuition de mathématiciens nous encourageait à le penser), et qui pourtant peut s'avérer prépondérant.

Nous mettons donc au point un **algorithme** AMS généralisé qui suggère de prendre des nombres de répliques plutôt faibles. Cela nous arrange, car les simulations numériques en grand nombre de répliques sont longues et complexes. Mais nous tombons en désaccord avec d'autres simulations numériques qui semblent montrer que le théorème est faux. La difficulté vient du fait que ces simulations utilisent un nombre de répliques gigantesque, et qu'il nous est impossible de les réaliser nous-mêmes pour comparer. Il faut alors mettre au point une méthode numérique rapide et efficace pour simuler le modèle d'Allen-Cahn. C'est à ce moment là que Maxime Gazeau introduit le splitting qui est étudié dans la seconde partie de ce mémoire. Il est à la base de deux résultats théoriques, respectivement sur les ordres de convergence forts et faibles, des **algorithmes de simulations numériques** en temps des solutions des équations aux dérivées partielles d'Allen-Cahn en présence de non-linéarités non globalement lipschitziennes.

Grâce à cette nouvelle méthode de simulations, on peut réaliser des test numériques de plus grande envergure et il ne faut pas longtemps pour comprendre d'où vient l'incohérence de certains résultats. Certaines implémentations d'AMS ne respectent pas les hypothèses techniques que nous avons dû mettre en place pour la démonstration. Cela nous conforte dans l'idée que ces hypothèses sont essentielles, et on pourra mettre en évidence sur des exemples jouets qu'elles ne sont pas accessoires.

J'ose aller plus loin encore, en exprimant la nécessité pour un mathématicien de comprendre les **algorithmes**, et tout particulièrement de connaître les méthodes numériques classiques. En effet, dans la troisième partie de ce mémoire, je montrerai comment ma connaissance du numérique m'a permis de mettre au point des démonstrations qui ne sont pas classiques dans leur approche, et comment elle m'a aidé à concevoir des méthodes d'évaluation de produits de finance et d'assurance.

Le premier résultat obtenu, et le plus simple, est la conception d'un produit d'assurance nommé CPPI. Les résultats théoriques présupposaient une évolution continue qu'il était impossible à mettre en pratique sur les marchés sans encourir des risques difficilement quantifiables. Partant du principe que la finalité de l'objet est de terminer dans un ordinateur, je mets au point avec Aymeric Kalife et Saad Mouti, un produit CPPI qui accepte des discrétisations en temps. Les calculs théoriques d'optimisation aboutissent et on obtient une quantification des risques encourus. On met d'ailleurs au point une technique de réplcation qui permet de se protéger contre ces risques par l'achat de produits, modélisés par des processus de Lévy à sauts, très peu disponibles sur les marchés boursiers.

Cela m'oriente vers des produits bien plus présents sur les marchés, et je commence à étudier les “variable annuities”. En collaboration avec Andrea Mollent, Xiao Wei et Antonino Zanette, nous mettons au point de nouveaux **algorithmes** théoriques et numériques d'évaluation des produits de type “variable annuities”. On se base sur des méthodes numériques classiques pour construire des algorithmes de splitting (Méthode ADI), ou pour

construire des algorithmes hybrides qui mélangent des techniques déterministes et stochastiques. Je détaille dans ce mémoire quelques idées de modélisation et de simulation pour ces méthodes, et bien que je ne puisse pas prendre le temps de toutes les expliquer, elles ont chacune des avantages et des inconvénients, parfois situés dans leur formulation mathématique. On ignore encore si l'équivalence entre la formulation par des trajectoires Monte-Carlo et la formulation par une équation aux dérivées partielles reste valable. Les résultats numériques semblent nous indiquer que c'est effectivement le cas, mais les techniques de reconstruction par splines étant plus performantes que les reconstructions linéaires, cela suggère qu'il existe un cadre de démonstration sans doute original à trouver.

Cette complémentarité dans mes connaissances à l'interface entre l'analyse numérique, l'analyse fonctionnelle et les processus stochastiques m'a permis de m'associer avec d'autres chercheurs du laboratoire. Je détaillerai bien plus deux collaborations dans la troisième partie de ce mémoire qui ont un point commun. La première collaboration avec Pierre-André Zitt exprime la nécessité de connaître les méthodes numériques, même pour un mathématicien qui ne réalise jamais de simulations numériques. En effet, je montre dans la partie de ce mémoire dédiée aux modèles de Wright-Fisher qu'un schéma numérique est apparu dans une formule de récurrence concernant un processus de tirages avec remises de boules dans une urne. Une fois ce schéma numérique découvert, la démonstration de la convergence a pu faire appel aux techniques classiques de l'analyse numérique. On montre notamment la convergence de ce schéma numérique vers la solution d'une équation aux dérivées partielles dont la forme était très difficilement intuitable.

Enfin, dans la dernière partie de ce mémoire, j'expose les résultats obtenus concernant les processus de Markov déterministes par morceaux. Il s'agit de ma collaboration avec Christianne Coccozza-Thivent, Robert Eymard et Michel Roussignol. Robert est un mathématicien expert en méthodes numériques, et notamment dans les méthodes en volumes finis. Christiane et Michel sont des probabilistes tous deux experts dans les processus probabilistes appliqués à la fiabilité. Ensemble, nous avons pu mettre au point une technique de démonstration complètement nouvelle pour montrer l'existence d'une solution à une équation de Kolmogorov forward en présence de termes frontières. La forme de cette équation était attendue par les probabilistes, mais il était impossible d'en caractériser les solutions car le terme de frontière présent dans le générateur infinitésimal était trop implicitement défini. En mettant au point un algorithme numérique basé sur une méthode en volumes finis, nous avons pu démontrer la convergence du schéma vers la solution d'une équation différentielle dont tous les termes pouvaient être identifiés. Cela permettait de donner un sens au terme de frontière, dans le générateur infinitésimal, qui a pu être identifié à une mesure singulière vivant uniquement sur la frontière. Cette mesure joue un rôle de compensateur, un peu comme un multiplicateur de Lagrange. Mais elle calcule également la quantité et la localisation de la matière qui passe à travers la frontière. In fine on obtient une méthode numérique qui permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution à une équation aux dérivées partielles de Kolmogorov forward.

Je conclurai cette introduction en rappelant le fil rouge de ce mémoire. Les démonstrations mathématiques s'appuient sur des algorithmes théoriques, qui peuvent suggérer ou être suggérés par des algorithmes numériques. C'est au mathématicien de faire l'effort d'apprendre ces méthodes numériques pour l'aider dans sa recherche de tous les instants.

Première partie

Étude théorique des équations aux dérivées partielles stochastiques

Dans cette partie, je tenterai de résumer les différents résultats que j'ai obtenus et qui se rapportent à l'étude théorique des équations aux dérivées partielles de type Cahn-Hilliard. Les premiers résultats proviennent de ma thèse, à laquelle je renvoie pour plus de détails. Je n'en parle que très rapidement, car ils permettent d'introduire les notions qui sont utilisées dans mes articles ultérieurs.

Les équations aux dérivées partielles stochastiques se situent à l'interface entre l'analyse fonctionnelle et les probabilités. Le cadre général présenté dans les livres de référence de [DPZ96], [DPZ02] et [DPZ14] a pu être étendu à de multiples équations aux dérivées partielles déterministes. Les questions essentielles se basent sur la régularité Hilbert-Schmidt des opérateurs différentiels, et notamment celle du semi-groupe de résolution associé. Les équations linéaires permettent d'exhiber des propriétés de régularités des solutions en temps et en espace via la convolution stochastique avec des processus de Wiener cylindriques, ou des processus de Wiener à trace finie. Dans le cas d'opérateurs auto-adjoints, l'analyse hilbertienne qui en découle est au centre des préoccupations, car la décomposition sur une base de vecteurs propres de l'opérateur différentiel simplifie la recherche d'estimation.

L'extension des équations aux dérivées partielles stochastiques linéaires à des équations non-linéaires se ramène naturellement à des **algorithmes** de points fixes basés sur un schéma itératif de Picard. On est ramené à montrer qu'une certaine application entre espaces fonctionnels est contractante en une norme bien choisie. L'hypothèse de non-linéarité lipschitzienne devient essentielle pour obtenir ce genre d'estimations. J'aimerais insister sur ce point. La solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique est obtenue par un schéma itératif, c'est-à-dire un **algorithme** dont il faut étudier la convergence. On est ramené à montrer la compacité d'un certain ensemble, et l'unicité de la limite. Ce n'est évidemment pas anodin, car ce procédé itératif fournit également certainement un moyen direct pour simuler la solution.

Toutefois comme les solutions vivent dans un espace fonctionnel *a priori* de dimension infinie, il nous faut représenter les solutions par des projections dans des espaces de dimension finie. Encore un fois, on retrouve la notion d'approximation par un **algorithme**, dont on cherche à montrer qu'elle est consistante avec le problème.

Dans cette partie, je m'intéresse à des résultats théoriques sur les équations aux dérivées partielles de type Cahn-Hilliard. Ces équations possèdent des non-linéarités qui ne sont pas lipschitziennes car le potentiel énergétique fait intervenir des fonctions logarithmiques. La première approximation (dirais-je encore **algorithme**?) se base sur une troncature de la série de Taylor du potentiel. On obtient des non-linéarités polynomiales qui, cette fois, peuvent être incluses dans un schéma d'itérations de Picard, sous l'hypothèse d'une dissipation de l'énergie qui revient à la parité du coefficient de plus haut degré dans le potentiel (avec le bon signe), ou de manière équivalente à l'imparité du coefficient de plus

haut degré de la non-linéarité (avec le bon signe).

Toutefois si l'on souhaite considérer les non-linéarités complètes, on doit augmenter le degré des polynômes. Ce ne serait pas forcément un problème si la fonction limite était régulière, mais dans le cas de non-linéarités logarithmiques, on est face à des fonctions limites qui sont singulières en certains points. Il faut alors mettre au point une technique de preuve qui gère les singularités. Les premiers résultats concernant l'évitement d'une singularité dans le cadre Cahn-Hilliard furent étudiés par Arnaud Debussche et Lorenzo Zambotti dans [DZ07]. Dans cet article, ils souhaitent montrer l'existence d'une solution pour un potentiel polynomial, mais avec une condition de positivité de la solution, i.e. on force l'existence d'une singularité au point 0 qui n'est pas *a priori* dans le potentiel, on parle de réflexion à la singularité.

On peut remarquer que les techniques de preuve (également dans le cas de l'équation de la chaleur avec réflexion dans [NP92], [FO01] ou [DMZ06]) se basent très fortement sur une seule et même idée : on va pénaliser la partie négative de la solution ! C'est encore un **algorithme**, et celui-ci est issu directement du domaine de l'analyse numérique. On ira même jusqu'à l'analogie entre la mesure de réflexion et un multiplicateur de Lagrange en optimisation.

Même si les résultats théoriques que j'ai ensuite obtenus se basaient au départ sur cette idée de pénalisation, elle n'est plus vraiment présente qu'en filigrane dans les nouvelles techniques de preuve, car la singularité présente dans la fonction non-linéaire joue elle-même le rôle de la pénalisation. On peut voir une volonté de ma part de développer des techniques de preuves qui sont issues de ma connaissance de la simulation numérique. Dans tous les cas, je garde en effet l'idée que ces résultats théoriques permettent de développer des **algorithmes de simulations numériques** efficaces. Mes résultats sur les bruits dégénérés sont d'ailleurs une ébauche de la compréhension de la simulation numérique des processus de Wiener cylindriques, qui sera détaillée dans la prochaine partie.

Je cite dans leur ordre chronologique les travaux qui se rapportent à cette partie théorique, mais dont l'essence et les techniques de preuves proviennent d'**algorithmes numériques** :

[H4] Luigi Manca et Ludovic Goudenège. Asymptotic properties of stochastic Cahn-Hilliard equation with singular nonlinearity and degenerate noise. *Sto. Proc. Appl.*, 125(10) :3785–3800, Octobre 2015.

[B3] Ludovic Goudenège. *Introduction aux équations différentielles stochastiques et équations aux dérivées partielles stochastiques*. Polycopié de cours de CentraleSupélec. 2016.

[P4] Luigi Manca et Ludovic Goudenège. Stochastic phase field α -Navier-Stokes vesicle-fluid interaction model. 2018.

1 Le modèle de Cahn-Hilliard

L'équation de Cahn-Hilliard-Cook est un modèle de séparation de phase dans un mélange binaire (cf. [Cah61], [CH58] et [CH71]) en présence de fluctuations thermiques (cf. [Coo70] et [Lan71]). Elle s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta(\Delta u + \Psi(u)) + \dot{\xi}, & \text{sur } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d, \\ \nabla u \cdot \nu = 0 = \nabla(\Delta u + \Psi(u)) \cdot \nu, & \text{sur } \partial\mathcal{D}, \end{cases} \quad (1)$$

où t est la variable de temps, $\Delta = \partial_{\theta\theta}^2$ est le Laplacien pour la variable spatiale $\theta \in \mathcal{D}$ et ν est une normale au bord $\partial\mathcal{D}$. La variable $u \in [-1, 1]$ représente le ratio entre les deux espèces et le terme de bruit $\dot{\xi}$ représente les fluctuations thermiques.

Le terme non-linéaire Ψ possède une forme en double logarithme :

$$\Psi(u) := \tau_c u - \frac{\tau}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right)$$

où τ et τ_c sont des températures avec $\tau < \tau_c$, τ_c étant la température critique du mélange.

Dans le cas déterministe, l'équation est obtenue comme un système gradient dans $H^{-1}(\mathcal{D})$ de l'énergie libre de Ginzburg-Landau :

$$\mathcal{E}(u) := \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} V(u) \right) d\theta$$

où V (une primitive de $-\Psi$) est un terme d'énergie potentielle. Puisque le gradient est calculé dans $H^{-1}(\mathcal{D})$, on obtient une équation d'ordre 4, sous la contrainte de masse conservée

$$\int_{\mathcal{D}} u(t, \theta) d\theta = \int_{\mathcal{D}} u(0, \theta) d\theta.$$

L'équation déterministe avec Ψ remplacée par une fonction polynomiale fut étudiée dans [CH58], [Lan71] et [NCS84]). Le principal inconvénient est que la solution ne reste plus contrainte dans l'espace physique $[-1, 1]$. Il faut alors considérer des non-linéarités singulières en ces points, comme par exemple les singularités logarithmiques, pour remédier à ce problème (cf. [BE91] et [DD95]).

Les dynamiques de séparation de phase ont été étudiées grâce à ce modèle, on pourra lire l'étude faite dans [NC98] et les références qui y sont citées, ou encore d'autres résultats récents sur la décomposition spinodale et la phase de nucléation dans [BF93, BMPW08, Gra93, MPW98, MPW00, SW99, SW00, Wan04].

Le bruit représente les fluctuations thermiques et reste un modèle communément accepté. Dans le cas de non-linéarités polynomiales cette équation aux dérivées partielles stochastique a été étudiée dans [BMPW01, BMPW05, CW01, CW02, DPD96, EM91]). Malheureusement la solution ne reste pas bornée dans l'espace $[-1, 1]$, notamment à cause des termes de bruits qui éjectent la solution avec probabilité positive.

Puisque l'équation de Cahn-Hilliard est construite comme un flot gradient dans $H^{-1}(\mathcal{D})$, il est naturel de considérer la dérivée spatiale d'un bruit espace-temps de type Wiener

cylindrique. De fait, l'équation conserve sa propriété d'être un système gradient, et une mesure invariante explicite peut être exhibée. Toutefois, si la dimension d'espace est supérieure strictement à 1, il est aisé de voir que même pour l'équation linéaire, les solutions ont une régularité spatiale négative, ce qui semble interdire la possibilité de considérer une non-linéarité. On se restreint donc au cas de la dimension 1.

2 Préliminaires

2.1 Espaces et bruit

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(0, 1)$. A est la réalisation du Laplacien dans $L^2(0, 1)$ avec des conditions aux bords homogènes de type Neumann, dans le sens où

$$D(A) = \text{Domaine de } A = \{h \in W^{2,2}(0, 1) : h'(0) = h'(1) = 0\}$$

où $W^{n,p}$ et $\|\cdot\|_{W^{n,p}}$ sont les notations habituelles pour les espaces de Sobolev et la norme canonique associée. On sait que A est un opérateur négatif auto-adjoint et qu'il existe une base hilbertienne $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $L^2(0, 1)$ composée de vecteurs propres pour les valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Il est d'importance cruciale de considérer des fonctions dont les moyennes en espace restent fixes au cours du temps, donc on se ramène souvent à des sous-espaces de fonctions tels que la quantité

$$\bar{h} := \int_{[0,1]} h(\theta) d\theta = \langle h, e_0 \rangle$$

est fixée à la valeur $c \in \mathbb{R}$. On note L_c cet espace de fonctions. On remarque que A est inversible sur $L^2(0, 1) \cap L_0$, et pour des fonctions h de moyenne en espace non nulle on peut définir $(-A)^{-1}h = (-A)^{-1}(h - \bar{h}) + \bar{h}$.

Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, on peut également définir $(-A)^\gamma$ par des techniques classiques d'interpolation. On note alors $V_\gamma := D((-A)^{\gamma/2})$ muni des semi-normes et normes suivantes :

$$\|h\|_\gamma = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} (-\lambda_i)^\gamma h_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|h\|_\gamma = (|h|_\gamma^2 + \bar{h}^2)^{1/2}, \quad \text{pour } h = \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i e_i.$$

La notation V_γ est consistante avec les notations classiques des espaces de Hilbert dans le sens où $V_0 = L^2(0, 1)$, $V_1 = D((-A)^{1/2}) \subset H^1(0, 1)$ et $V_2 = D((-A)) \subset H^2(0, 1)$.

Concernant le terme de bruit, on sera amené à considérer deux types de covariance. Lorsqu'on souhaite conserve la propriété de système gradient il faut considérer un opérateur $C = \sqrt{-A}$ défini par

$$\sqrt{-A} = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad D(\sqrt{-A}) = W_0^{1,2}(0, 1)$$

et qui vérifie

$$\sqrt{-A}^* = -\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad D(\sqrt{-A}^*) = W^{1,2}(0, 1), \quad \text{et} \quad \sqrt{-A}\sqrt{-A}^* = -A.$$

Dans le cas d'un bruit régulier, on considère un opérateur $C = \sqrt{B}$ tel que la quantité

$$\text{Tr}_\gamma := \text{Tr} \left[\sqrt{B}(-A)^\gamma \sqrt{B}^* \right] \tag{2}$$

est finie pour certaines valeurs de $\gamma \in \mathbb{R}$ qui seront précisées ultérieurement. On suppose également que $\sqrt{B} e_0 = 0$ afin d'assurer une conservation de la masse.

2.2 Description des équations non-linéaires

Pour $\alpha > 0$, on définit :

$$f_\alpha(u) := \begin{cases} +\infty, & \text{pour tout } u \leq 0, \\ u^{-\alpha}, & \text{pour tout } u > 0, \end{cases} \quad (3)$$

et

$$f_{\ln}(u) := \begin{cases} +\infty, & \text{pour tout } u \leq 0, \\ -\ln(x), & \text{pour tout } u > 0, \end{cases} \quad (4)$$

Pour $\mu \in \mathbb{R}$, on définit :

$$f(u) := \begin{cases} +\infty, & \text{pour tout } u \leq -1, \\ \ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right) + \mu u, & \text{pour tout } u \in (-1, 1), \\ -\infty, & \text{pour tout } u \geq 1, \end{cases} \quad (5)$$

et la primitive F de $-f$ telle que :

$$F(u) := (1+u) \ln(1+u) + (1-u) \ln(1-u) - \frac{\mu}{2} u^2, \text{ pour tout } u \in (-1, 1).$$

Afin de résoudre les équations aux dérivées partielles stochastiques impliquant les non-linéarités précédentes, nous allons utiliser des approximations lipschitziennes ou polynomiales de ces fonctions. Précisément, dans le cas d'approximations polynomiales, on note $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales qui converge simplement vers la fonction f sur $(-1, 1)$, et qui est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la formule :

$$f_n(x) := -2 \sum_{k=0}^n \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)} + \mu u, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

ainsi que la primitive F^n de $-f^n$ nulle en 0.

Avec ces notations, pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie l'approximation polynomiale de (1) écrite sous la forme abstraite pour une donnée initiale $x \in V_{-1}$.

$$\begin{cases} dX^n = -\frac{1}{2}(A^2 X^n + A f_n(X^n))dt + C dW, \\ X^n(0) = x. \end{cases} \quad (7)$$

Cette équation, qui est plus régulière, a été étudiée dans [DPD96] pour le cas $C = I_d$. Les résultats se généralisent immédiatement, et il existe une unique solution X^n presque sûrement à valeurs dans $\mathcal{C}([0, T]; V_{-1}) \cap L^{2n+2}((0, T) \times (0, 1))$. C'est une solution "mild" ou faible. De plus sa moyenne est conservée au cours du temps. Plus de détails sont donnés dans les articles [Gou09b, DG11].

2.3 Mesures invariantes

L'étude des mesures invariantes est cruciale pour étudier le comportement en temps long des solutions d'une équation aux dérivées partielles stochastique. Ici, grâce à la propriété de système gradient, les mesures invariantes sont données par une formule explicite. De fait l'existence de solutions stationnaires permet de définir des solutions uniques en loi sur lesquelles des procédés de passage à la limite peuvent être appliqués. On se ramène dans un premier temps à étudier la convergence de la famille de mesures invariantes des équations approchées (7).

Je montre dans cette section comment obtenir les mesures invariantes limites. Remarquons tout d'abord que la solution de l'équation linéaire de donnée initiale $x \in V_{-1}$ est donnée par la formule de convolution stochastique standard

$$Z(t, x) = e^{-tA^2/2}x + \int_0^t e^{-(t-s)A^2/2}\sqrt{B} dW_s.$$

Ce processus est dans $\mathcal{C}([0, +\infty[; V_{-1})$ (cf. [DPZ92]). En particulier, il est de moyenne constante en espace, et la loi du processus Z est la mesure Gaussienne :

$$Z(t, x) \sim \mathcal{N}(e^{-tA^2/2}x, Q_t),$$

avec

$$Q_t = \int_0^t \sqrt{B^*} e^{-sA^2/2} e^{-sA^2/2} \sqrt{B} ds = \sqrt{B^*} (-A)^{-2} (I - e^{-tA^2}) \sqrt{B}.$$

Si on fait tendre $t \rightarrow +\infty$, la loi de $Z(t, x)$ converge vers une mesure Gaussienne sur L^2 définie par :

$$\mu_c := \mathcal{N}(c e_0, \sqrt{B} (-A)^{-2} \sqrt{B^*}), \text{ où } c = \bar{x}.$$

Dans le cas du flot gradient dans H^{-1} (i.e. $B = -A$), la commutation des opérateurs simplifie l'écriture des opérateurs de covariance, et on obtient la formule

$$Z(t, x) \sim \mathcal{N}(e^{-tA^2/2}x, Q_t), \quad \text{avec } Q_t = (-A)^{-1} (I - e^{-tA^2}).$$

Si on fait tendre $t \rightarrow +\infty$, la loi de $Z(t, \cdot, x)$ converge encore vers une mesure Gaussienne sur L^2 définie par :

$$\mu_c := \mathcal{N}(c e_0, (-A)^{-1}), \text{ où } c = \bar{x},$$

On remarque que, dans ce cas particulier, μ_c est concentrée sur le sous-espace $V_{-1} \cap C([0, T]) \cap L_c$.

Concernant l'équation polynomiale (7), dans le cas d'une covariance régulière (trace finie), pour chaque valeur de $c \in \mathbb{R}$, elle possède un semi-groupe de transition $(P_t^{n,c})_{t \geq 0}$. L'existence d'une mesure invariante peut être démontrée par les mêmes techniques présentes dans [DPD96].

Dans le cas du flot gradient, par une approximation de Galerkin, la décroissance de $u \mapsto f_n(u) - \mu u$ et la formule de Bismut-Elworthy-Li, on peut montrer que $(P_t^{n,c})_{t \geq 0}$ est "Strong Feller". L'irréductibilité provenant d'un argument de contrôle, le théorème de

Doob assure qu'il existe une unique mesure invariante ν_c^n qui est de plus ergodique. Elle est donnée par la formule :

$$\nu_c^n(dx) = \frac{1}{Z_c^n} \exp(-U^n(x)) \mu_c(dx),$$

où Z_c^n est une constante de normalisation et $U^n(x) = \int_0^1 F^n(x(\theta)) d\theta$ pour $x \in L^2(0, 1)$.

Sur cette formule, on comprend que la suite $(\nu_c^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger que vers la mesure

$$\nu_c(dx) = \frac{1}{Z_c} \exp(-U(x)) \mathbb{1}_{x \in K} \mu_c(dx), \quad (8)$$

où Z_c est une constante de normalisation, et

$$U(x) := \int_0^1 F(x(\theta)) d\theta, \quad x \in L^2(0, 1).$$

Remarquons la présence de l'indicatrice de K qui est un sous-espace de $L^2(0, 1)$. Il est montré dans mes articles [Gou09b] et [DG11] la convergence de la suite de mesures $(\nu_c^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$K = \{x \in L^2 : x \geq 0\}$$

dans le cas d'une seule singularité i.e. f_α (cf. équation (3)) ou f_{in} (voir équation (4)),

$$K = \{x \in L^2 : -1 \leq x \leq 1\}$$

dans le cas d'une double singularité i.e. f (cf. équation (5)).

3 Résultats principaux

Il n'est pas clair que les singularités de type logarithmique ou en puissance soient suffisamment fortes pour empêcher la solution de sortir de l'intervalle physique $[-1, 1]$. Cette perte de consistance physique dans le cas stochastique est bien connue. Par exemple pour l'équation de la chaleur linéaire stochastique avec des conditions de Dirichlet au bord, et pour une solution initiale positive, on souhaite conserver la positivité de la solution au cours du temps. On parle de l'équation de la chaleur réfléchie en ajoutant un terme mesure dans l'équation qui joue le rôle de force de répulsion infinie au niveau de la valeur 0. Cette modélisation représente l'évolution d'une interface aléatoire proche d'un mur. On peut penser tout simplement à une bulle posée sur le sol (cf. [DMZ06], [FO01], [GOS01], [NP92], [Zam02], [Zam03] et [Zam04]). Le cas d'un double mur a également été traité dans [Oto06]. L'outil essentiel pour montrer l'existence de solution est un principe de comparaison, et l'étude des formes de Dirichlet qui restent symétriques et qui assurent l'existence d'une mesure invariante explicite.

En transposant cette analogie vers les équations de Cahn-Hilliard, on est amené à résoudre des équations de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta(\Delta u + \Psi(u) + \eta) + \dot{\xi}, & \text{dans } \mathcal{D} = [0, 1], \\ \nabla u \cdot \nu = 0 = \nabla(\Delta u) \cdot \nu, & \text{sur } \partial\mathcal{D}, \end{cases} \quad (9)$$

pour $\Psi \in \{f_\alpha, f_{\ln}, f\}$ et où η est une mesure qui vérifie les conditions dites de contact

$$\int u \, d\eta = 0, \quad (10)$$

dans le cas $\Psi \in \{f_\alpha, f_{\ln}\}$, i.e. une seule singularité en 0, ou alors

$$\eta = \eta_- - \eta_+ \quad \text{avec} \quad \int (1+u) d\eta_- = \int (1-u) d\eta_+ = 0 \quad (11)$$

dans le cas $\Psi = f$, i.e. une double singularité en ± 1 .

La connaissance de la mesure invariante reste vérifiée dans le cas de l'équation de Cahn-Hilliard, cependant il n'existe plus de principe de comparaison. Le travail réalisé dans mes articles [Gou09b] et [DG11] concerne justement l'élaboration de nouvelles techniques en l'absence de ce principe de comparaison. Mon article [GM15] étudie le cas d'un bruit régulier et dégénéré. Dans ce cas, nous étudions essentiellement les propriétés asymptotiques du semi-groupe de transition.

3.1 Une seule singularité logarithmique

Dans mon article [Gou09b], je montre que la décroissance des fonctions approchées est l'ingrédient clé pour obtenir de bonnes estimations. De fait, l'approximation polynomiale, bien que classique, n'est pas adaptée, et j'ai dû mettre en place une approximation lipschitzienne de la non-linéarité, au point $u_n = 1/n$, que je note encore f_n . On obtient

des solutions grâce à la convergence des mesures invariantes, mais le point délicat est la convergence du terme $f_n(\hat{X}_c^n)$ (où \hat{X}_c^n est l'unique solution stationnaire) vers le terme $f(\hat{X}_c)$. Premièrement, il faut montrer que l'expression $f(\hat{X}_c)$ à un sens, car on compose des fonctions. La continuité de la limite \hat{X}_c est donc essentielle. Puis il faut montrer que $f_n(\hat{X}_c^n) - f(\hat{X}_c)$ converge vers 0. C'est ce dernier point qui force l'introduction d'une mesure de réflexion.

Théorème 3.1. Soit $c > 0$ et $T > 0$, presque sûrement, \hat{X}_c^n converge en probabilité, lorsque n tends vers l'infini, vers un processus \hat{X}_c dans $\mathcal{C}(O_T)$. De plus $f(\hat{X}_c) \in L^1(O_T)$ presque sûrement, et si on pose

$$d\eta^n = f^n(\hat{X}_c^n(t)(\theta))dtd\theta - f(\hat{X}_c(t)(\theta))dtd\theta$$

alors (\hat{X}_c^n, η^n, W) converge en loi vers (\hat{X}_c, η, W) une solution stationnaire forte de (9).

Afin de montrer la convergence uniforme, il était essentiel d'utiliser un théorème de représentation de Skorohod. Cela fournit également le moyen de montrer une estimation L^1 sur le terme η^n qui donne un sens au terme limite η . Il reste à montrer que la mesure de réflexion vérifie une condition de contact, ce qui est obtenu grâce à la convergence uniforme. Enfin, la tension, obtenue via la convergence des mesures ν_c^n et l'unicité des solutions permettent d'obtenir une convergence en loi en suivant les techniques classiques présentes dans [GK96].

Afin de montrer l'existence d'une solution pour une donnée initiale x , on montre qu'on peut choisir la donnée initiale dans un sous-espace dense de $K \cap V_{-1}$ donné par le support de la mesure ν_c qui ne contient que des fonctions positives de masse constante c . L'étude de la régularité du semi-groupe de transition (obtenu comme limite des semi-groupes approchés) permet d'étendre la solution pour toute donnée initiale dans $K \cap V_{-1} \cap L_c$.

Proposition 3.2. Pour tout $c > 0$, on peut définir $(P_t^c)_{t \geq 0}$ un semi-groupe tel que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_b(V_{-1})$ et $x \in K \cap V_{-1} \cap L_c$

$$P_t^c \phi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_t^{n,c} \phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X(t, x))]$$

via un processus de Markov $(X(t, x), t \geq 0)$ qui est "Strong Feller". De plus pour tout $t > 0$

$$|P_t^c \phi(x) - P_t^c \phi(y)| \leq \frac{\|\phi\|_\infty}{\sqrt{t}} \|x - y\|_{V_{-1}} \text{ pour tout } x, y \in K \cap V_{-1} \cap L_c.$$

On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 3.3. Soit Ξ une variable aléatoire dans K telle que $\bar{\Xi} > 0$ presque sûrement et (Ξ, W) indépendants, alors il existe un processus continu noté $(X(t, \Xi), t \geq 0)$ et une mesure η^Ξ tels que :

- $(X(t, \Xi), \eta^\Xi, W)$ est l'unique solution forte de (9) avec $X(0, \Xi) = \Xi$ presque sûrement.
- Pour $\Xi = x \in K \cap V_{-1} \cap L_c$, le processus de Markov $(X(t, x), t \geq 0)$ est continu et possède P_t^c comme semi-groupe de transition, vérifiant la propriété "Strong Feller" sur $V_{-1} \cap L_c$.

- Si Ξ est de loi ν_c avec $c > 0$, alors $(X(t, \Xi), t \geq 0)$ est égal en loi à la solution stationnaire $(\hat{X}_c(t), t \geq 0)$.

3.2 Mesures de réflexion

Bien que le théorème 3.3 précédent soit satisfaisant, j'ai tenté de montrer que la mesure de réflexion était identiquement nulle. Suivant les travaux de Lorenzo Zambotti dans [Zam03], j'ai étudié les Fonctionnelles Additives Continues (CAF) décrites dans [FÖT94]. Je montre notamment que la mesure de réflexion est une Fonctionnelle Additive Continue Positive (PCAF) et que sa mesure de Revuz associée est explicite et apparaît dans une formule d'intégration par parties comme un terme de bord. On note $(\Sigma_c(r), r \in (0, 1))$ ce terme de bord défini à l'aide d'un processus $(U_r, r \in (0, 1))$ construit par une modification du méandre Brownien (cf. [Den83], [RY91]). On obtient alors la formule d'intégration par parties suivante :

Théorème 3.4. Pour tout $\phi \in \mathcal{C}_b^1(V_{-1})$ et $h \in D(A)$, avec Π la projection sur L_0 , on a

$$\begin{aligned} \int_{V_{-1}} \partial_{\Pi h} \phi(x) \mathbb{1}_{x \in K} \nu_c(dx) &= - \int_{V_{-1}} (\langle x, Ah \rangle + \langle f(x), \Pi h \rangle) \phi(x) \nu_c(dx) \\ &\quad - \int_0^1 \Pi h(r) \int \phi \frac{d\nu_c}{d\mu_c} d\Sigma_c(r) dr \end{aligned}$$

En utilisant les formes de Dirichlet, on peut caractériser la masse totale de la mesure de réflexion, qui apparaît dans le terme de bord. En effet pour tout $\delta > 0$

$$\int_{V_{-1}} \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \exp(-t) \int_0^1 \Pi h(\theta) \eta^x(\delta + dt, d\theta) \right] \nu_c(dx) = \int_0^1 \int \Pi h(r) \frac{d\nu_c}{d\mu_c} d\Sigma_c(r) dr$$

Dans cette formule, il est clair que la mesure de réflexion ne peut pas être identiquement nulle dans le terme de gauche, puisque la singularité logarithmique appliquée au méandre Brownien n'impose pas la nullité du terme de droite. Afin de rendre plus clair ce point, imaginons que la fonction f n'est plus la fonction f_{in} mais qu'on la remplace par la fonction f_α . On peut démontrer tous les théorèmes précédents, modulo quelques modifications mineures, mais, dans ce cas, les résultats classiques sur le méandre Brownien montrent que, presque sûrement et pour tout $r \in (0, 1)$, si $\alpha \geq 3$, alors

$$\int_0^1 F_\alpha(U_r(\theta)) \propto \int_0^1 \frac{d\theta}{(U_r(\theta))^{\alpha-1}} = +\infty,$$

avec F_α la primitive de f_α , ce qui est une condition suffisante pour forcer la nullité du terme de droite. En effet l'estimation sur les quantités approchées vérifient

$$\left| \frac{d\nu_c^n}{d\mu_c} \Sigma_c^n(r) \right| \leq C \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^1 F_\alpha^n(U_r(\theta)) d\theta \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De fait, toute l'étude précédente a été réalisée pour des singularité en puissance, et on obtient les mêmes théorèmes, avec l'amélioration suivante :

Théorème 3.5. Pour tout $c > 0$, pour tout $x \in K \cap V_{-1} \cap L_c$, pour tout $\alpha \geq 3$. La mesure de réflexion de la solution forte $(X(t, x), t \geq 0, \eta^x, W)$ pour la non-linéarité f_α est identiquement nulle. De plus, dans le théorème 3.4, le terme de bord s'annule.

3.3 Deux singularités logarithmiques

Dans le cas de la double singularité logarithmique, nous reprenions les idées présentes dans [DZ07], [Gou09b] et [Zam03], mais des difficultés supplémentaires ont été rencontrées. En effet la positivité du terme non-linéaire était essentielle dans les théorèmes possédant une seule singularité, et il a fallu décrire une estimée *a priori* sur la norme L^1 du terme non-linéaire afin d'exhiber une limite vers un terme mesure. Une telle estimée *a priori* est évidente dans le cas d'un bruit régulier, tout simplement par une utilisation de la formule d'Itô (cela sera utilisé dans la section suivante). Mais ce n'est pas le cas ici, et de nouvelles techniques ont été développées. Enfin on prouve que la mesure invariante est unique et ergodique. On montre même qu'elle possède des propriétés de mélange exponentiel grâce à des techniques de couplages développées par Cyril Odasso dans [Oda07]. Toutefois, on n'obtiendra pas de formule d'intégration par parties, ce qui rendait inutile l'extension des résultats à des singularités en puissance. On obtient donc le théorème suivant :

Proposition 3.6. Soit $-1 < c < 1$ et $T > 0$, presque sûrement, \hat{X}_c^n converge en probabilité, lorsque n tend vers l'infini, vers un processus \hat{X}_c dans $\mathcal{C}(O_T)$. De plus $f(\hat{X}_c) \in L^1(O_T)$ presque sûrement, et si on pose

$$d\eta_+^n = -f^n(\hat{X}_c^n(t, \theta)) \mathbb{1}_{\hat{X}_c^n(t, \theta) > 0} dt d\theta + f(\hat{X}_c(t, \theta)) \mathbb{1}_{0 < \hat{X}_c(t, \theta) \leq 1} dt d\theta,$$

et

$$d\eta_-^n = f^n(\hat{X}_c^n(t, \theta)) \mathbb{1}_{\hat{X}_c^n(t, \theta) \leq 0} dt d\theta - f(\hat{X}_c(t, \theta)) \mathbb{1}_{-1 \leq \hat{X}_c(t, \theta) \leq 0} dt d\theta,$$

alors (η_+^n, η_-^n) converge en probabilité vers (η_+, η_-) et $(\hat{X}_c, \eta_+, \eta_-, W)$ est une solution stationnaire forte de (9).

Suivant la même procédure que précédemment, on choisit une condition initiale dans un sous-espace dense de $K \cap V_{-1} \cap L_c$ dans le support de ν_c qui ne contient que des fonctions à valeurs dans $[-1, 1]$. En étudiant la régularité du semi-groupe de transition, on peut étendre les solutions à tout l'espace $K \cap V_{-1} \cap L_c$.

Proposition 3.7. Pour tout $c > 0$, on peut définir $(P_t^c)_{t \geq 0}$ un semi-groupe tel que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_b(V_{-1})$ et $x \in K \cap V_{-1} \cap L_c$

$$P_t^c \phi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_t^{n,c} \phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X(t, x))]$$

via un processus de Markov $(X(t, x), t \geq 0)$ qui est "Strong Feller". De plus, pour tout $t > 0$

$$|P_t^c \phi(x) - P_t^c \phi(y)| \leq \frac{2 \exp(\mu^2 t / 4)}{\mu} \frac{\|\phi\|_\infty}{\sqrt{t}} \|x - y\|_{V_{-1}} \text{ pour tout } x, y \in K \cap V_{-1} \cap L_c.$$

On obtient bien évidemment un théorème d'existence de solutions. Ici, comme il n'était pas nécessaire d'étudier les mesures pour des données initiales aléatoires (car on n'étudie pas les formules d'intégration par parties), on a une version simplifiée du théorème 3.3, sans la loi initiale Ξ .

Théorème 3.8. Soit $c \in (-1, 1)$. Soit $x \in K \cap L_c$, alors il existe un processus continu noté $(X(t, x))_{t \geq 0}$ et deux mesures positives η_+^x et η_-^x tels que :

- $((X(t, x))_{t \geq 0}, \eta_+^x, \eta_-^x, W)$ est l'unique solution forte de (9) avec $X(0, x) = x$ presque sûrement.
- Le processus de Markov $(X(t, x), t \geq 0)$ pour $x \in K \cap V_{-1} \cap L_c$ est continu et possède $(P_t^c)_{t \geq 0}$ comme semi-groupe de transition, vérifiant la propriété "Strong Feller" sur $V_{-1} \cap L_c$.
- La mesure ν_c est une mesure invariante pour $(P_t^c)_{t \geq 0}$.

Par des arguments classiques, on peut voir que pour $\mu = 0$, ν_c^n vérifie une inégalité log-Sobolev et une inégalité de Poincaré. Les constantes dans ces inégalités ne dépendent pas de $n \in \mathbb{N}$, donc on possède les mêmes estimations pour ν_c . Pour $\mu \neq 0$, on peut utiliser les techniques de [DPDG02] et montrer que c'est encore vrai.

Proposition 3.9. Pour tout $c \in (-1, 1)$, le semi-groupe de transition $(P_t^c)_{t \geq 0}$ est irréductible. ν_c est l'unique mesure invariante de $(P_t^c)_{t \geq 0}$. De plus elle est ergodique.

Par des arguments de couplage développés par Cyril Odasso dans [Oda07], on peut également montrer un résultat de mélange exponentiel. Ces résultats sont essentiels pour étudier les régimes stationnaires, et en particulier pour l'échantillonnage des mesures invariantes.

Théorème 3.10. Pour tout $c \in (-1, 1)$, il existe $\beta > 0$ petit et une constante $C > 0$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_b(K \cap V_{-1} \cap L_c)$, $t > 0$ et $x \in V_{-1} \cap L_c$

$$|\mathbb{E}[\varphi(X(t, x))] - \nu_c(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_\infty e^{-\beta t}.$$

3.4 Bruits réguliers et dégénérés

Les résultats précédents permettent d'étudier les régimes asymptotiques mais ils s'appuient essentiellement sur les résultats de mesures invariantes qui sont obtenues pour des bruits blancs espace-temps. Dans le cas de bruits plus réguliers (c'est-à-dire de trace finie), on peut se poser la question de l'existence des mesures invariantes. De même, puisque l'étape finale est de simuler les équations aux dérivées partielles stochastiques, on doit tenter de se restreindre à des bruits dégénérés, c'est-à-dire des bruits qui ne possèdent pas tous les modes $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ comme modes d'excitations browniennes.

Dans notre article avec Luigi Manca (cf. [GM15]), on ne considère plus un bruit cylindrique dans $H^{-1}(\mathcal{D})$. Dans ce cas, l'équation ne possède plus la structure gradient et les techniques développées dans [DZ07], [Gou09b] et [DG11] ne s'appliquent plus. Cependant, comme on l'avait expliqué précédemment, le choix de bruits réguliers permet d'utiliser la formule d'Itô, ce qui va permettre d'exhiber des estimations *a priori* qui devraient être suffisantes pour définir des solutions aux équations approchées par des non-linéarités polynomiales. Effectivement la tension des solutions approchées peut être obtenue dans des espaces de faible régularité. Toutefois, à cause de la dégénérescence du bruit, il est délicat de montrer que les solutions approchées sont tendues dans $\mathcal{C}([0, T] \times \mathcal{D}; [-1, 1])$. Pourtant la continuité est cruciale pour considérer des termes non-linéaires. On ne pourra donc ni caractériser la limite comme la solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique, ni même montrer l'unicité d'une telle limite.

Cependant, il est possible d'étudier le semi-groupe $(P_t^c)_{t \geq 0}$ associé à la limite d'une suite extraite. A priori ce semi-groupe dépend de la suite extraite, mais on sait montrer qu'il est ergodique et qu'il admet une unique mesure invariante. Pour cela on doit supposer que le bruit engendre un espace contenant au moins les premiers vecteurs propres du Laplacien, c'est une hypothèse d'"ellipticité essentielle" (cf. [HM06, HM11]).

Supposons que le bruit vérifie l'équation (2) pour $\gamma = -1$ ou $\gamma = 0$.

Proposition 3.11. Soit $x \in V_{-1}$ et $\text{Tr}_{-1} < +\infty$. Alors les lois de $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont tendues dans $L^2([0, T]; V_1) \cap L^\infty([0, T]; V_{-1})$, et on a

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |X^n(t)|_1^2 dt \right] \leq |x|_{-1}^2 + T \mathcal{Q}_c(\mu),$$

où $\mathcal{Q}_c(\cdot)$ est un polynôme explicite. De plus pour tout $t \in [0, T]$ on obtient

$$\mathbb{E} [|X^n(t)|_{-1}^2] \leq \left(|x|_{-1}^2 - \frac{\mathcal{Q}_c(\mu)}{\pi^4} \right) \exp(-\pi^4 t) + \frac{\mathcal{Q}_c(\mu)}{\pi^4}.$$

Proposition 3.12. Soit $x \in V_{-1}$ et $\text{Tr}_0 < +\infty$. Alors les lois de $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont tendues dans $L^2([0, T]; V_2) \cap L^\infty([0, T]; V_0)$, et on a

$$2 \int_{O_T} (\nabla X^n(t)(\theta))^2 \left(\sum_{k=0}^n (X^n(t)(\theta))^{2k} \right) dt d\theta \leq 2 \int_0^T \langle \sqrt{B}^* X^n(t), dW_t \rangle + |x|_0^2 + T \text{Tr}_0.$$

Par une procédure d'extraction diagonale, on déduit des résultats précédents la proposition suivante :

Proposition 3.13. Pour tout $c \in (-1, 1)$, il existe un semi-groupe de transition $(P_t^c)_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{B}_c(V_{-1})$ et une suite extraite $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $P_t^{n_k \cdot c} \varphi(x) \rightarrow P_t^c \varphi(x)$ quand $n_k \rightarrow \infty$, pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_c(V_{-1})$, $x \in V_{-1}$, $t \geq 0$.

On définit un processus limite via une extraction de la suite $X^n(t, x)$ qu'on note encore $X^n(t, x)$ pour alléger les notations. L'existence d'une mesure invariante suit par des arguments classiques de compacité, et l'estimation de régularité du semi-groupe de transition suivante :

$$|X^n(t, x) - X^n(t, y)|_{-1} \leq e^{\mu t} |x - y|_{-1},$$

qui est valide pour tout $x, y \in V_{-1} \cap L_c$, pour tout $t > 0$. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 3.14. Pour tout $c \in (-1, 1)$, il existe une mesure invariante pour le semi-groupe $(P_t^c)_{t \geq 0}$.

Pour montrer que cette mesure invariante est en fait unique, on va montrer, sous l'hypothèse de l'équation (12) précisée plus tard, que le semi-groupe de transition est asymptotiquement "Strong Feller" et topologiquement irréductible. On rappelle que puisque le bruit est dégénéré on ne peut pas utiliser les techniques présentes dans [Gou09b]. En particulier la formule de Bismut-Elworthy-Li ne s'applique pas, et le semi-groupe n'est donc pas "Strong Feller", il ne l'est qu'asymptotiquement.

La propriété d'un semi-groupe d'être asymptotiquement "Strong Feller" fut introduite dans [HM06] afin d'étudier les propriétés d'ergodicité de l'équation de Navier-Stokes en dimension 2 perturbée par un bruit très dégénéré. La définition exacte se trouve dans [HM06, Definition 3.8], et on a la propriété suivante :

Proposition 3.15 (Proposition 3.12 dans [HM06]). Soit t_n et δ_n deux suites positives avec $\{t_n\}$ strictement croissante et $\{\delta_n\}$ convergente vers 0. Un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H est asymptotiquement "Strong Feller" si pour tout $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ avec $|\phi|_\infty$ et $|\nabla\phi|_\infty$ finie, on a

$$|\nabla P_{t_n}\phi(x)| \leq \Lambda(\|x\|_H)(|\phi|_\infty + \delta_n|\nabla\phi|_\infty)$$

pour tout n , où $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante fixée.

Malheureusement, on n'arrive pas à montrer que le semi-groupe $(P_t^c)_{t \geq 0}$ est différentiable (dans le cas du bruit blanc c'est le cas cf. [Gou09b]). Même pour le semi-groupe $(P_t^{c,n})_{t \geq 0}$ on n'arrive pas à montrer la différentiabilité. Toutefois, on va considérer une propriété sous une forme légèrement différente, ce qui sera suffisant pour notre cas :

Proposition 3.16. Un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H est asymptotiquement "Strong Feller" s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ avec $|\phi|_\infty$ et $|\nabla\phi|_\infty$ finie, on a

$$|P_t\phi(x) - P_t\phi(y)| \leq \Lambda(|x|_{-1} \vee |y|_{-1})(|\phi|_\infty + e^{-\delta t}|\nabla\phi|_\infty)|x - y|_H.$$

où $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante fixée.

On peut montrer cette propriété avec les mêmes arguments développés pour démontrer [HM06, Proposition 3.12]. Le membre de droite est clairement une simple modification de la proposition précédente avec $\delta_n = e^{-\delta t}$. La modification majeure concerne le membre de gauche, où on ne fait plus l'hypothèse de la différentiabilité du semi-groupe.

L'hypothèse majeure connue sous le nom d'"ellipticité essentielle" nécessaire pour obtenir nos résultats est la suivante :

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \langle \cdot, e_k \rangle e_k \tag{12}$$

où $b_k > 0$ pour $k \in \{1, \dots, N\}$ et

$$(N + 1)^2 - \mu > 0. \tag{13}$$

En d'autres mots, on fait l'hypothèse que pour un entier N suffisamment grand $\text{span}\{e_1, \dots, e_N\} \subset \text{range}(B)$. Il semble assez clair que des bruits plus dégénérés peuvent être considérés pour obtenir la propriété asymptotique "Strong Feller", car ces deux hypothèses sont simplement techniques, et cela pourra faire l'objet d'une recherche future. Toutefois, on peut remarquer que l'équation (13) n'est pas fortement restrictive. En effet, l'ordre de grandeur de μ est aux alentours de 1, et donc $N = 1$ convient !

L'importance de la propriété asymptotique "Strong Feller" s'explique ainsi : s'il existe deux mesures invariantes ergodiques distinctes, alors elles ont forcément des supports disjoints (cf. [HM06, Theorem 3.16]). On utilise alors la définition de [HM11] qui définit une notion d'irréductibilité faible.

Définition 3.17. On dit qu'un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H est faiblement topologiquement irréductible si pour tout $x_1, x_2 \in H$ il existe $y \in H$ tel que pour tout ouvert A contenant y il existe $t_1, t_2 > 0$ avec $P_{t_i}(x_i, A) > 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Or il est démontré dans [HM11, Corollary 1.4] qu'un semi-groupe de Markov qui est "Feller", faiblement topologiquement irréductible et asymptotiquement "Strong Feller" possède au plus une seule mesure invariante. Dans l'article avec Luigi Manca (cf. [GM15]), on montre donc les deux propriétés suivantes :

Proposition 3.18. Sous les hypothèses (12) et (13), pour tout $c \in (-1, 1)$ le semi-groupe de transition $(P_t^c)_{t \geq 0}$ sur $V_{-1} \cap L_c$ est asymptotiquement "Strong Feller".

Proposition 3.19. Pour tout $c \in (-1, 1)$, le semi-groupe de transition $(P_t^c)_{t \geq 0}$ sur $V_{-1} \cap L_c$ est faiblement topologiquement irréductible.

D'après la proposition 3.18 et la proposition 3.19, on obtient directement le théorème suivant.

Théorème 3.20. Sous les hypothèses (12) et (13), pour tout $c \in (-1, 1)$ le semi-groupe de transition $(P_t^c)_{t \geq 0}$ sur $V_{-1} \cap L_c$ possède une unique mesure invariante.

On imagine que la propriété d'être asymptotiquement "Strong Feller" peut être obtenue sous des hypothèses plus faibles de mélange, mais il faut pour cela montrer comment la non-linéarité envoie le bruit sur les autres modes. Quand la non-linéarité est polynomiale, cela a été fait dans [HM11], mais on doit montrer que les estimés ne dépendent pas du degré $n \in \mathbb{N}$ pour appliquer les résultats sur la limite. On peut remarquer que dans le cas de bruit blanc espace-temps, on sait qu'on a unicité (modulo une mesure de réflexion). Dans le cas déterministe, on a également unicité car on possède une estimée L^∞ sur les solutions qui ne touchent pas les singularités en ± 1 . Dans ces deux cas, la continuité a été démontrée, et on peut imaginer que cette propriété devrait être satisfaite dans le cas de bruits réguliers, ce qui prouverait la convergence et l'unicité des solutions.

4 Simulations numériques de l'équation de Cahn-Hilliard

Dans la première partie de ce mémoire, je détaillais les résultats obtenus sur l'équation de Cahn-Hilliard. En réalité ce travail sur l'équation de Cahn-Hilliard est allé plus loin, car avec Arnaud Debussche, nous avons commencé à regarder les simulations numériques de l'équation de Cahn-Hilliard stochastique. Il existait au laboratoire de l'IRMAR une bibliothèque numérique nommée MELINA [Mar08] qui fut créée par Daniel Martin. Cette bibliothèque d'éléments finis écrite en FORTRAN permettait de simuler les solutions d'équations aux dérivées partielles à travers un simple détail de leur formulation variationnelle, la bibliothèque se chargeant elle-même de construire et d'assembler les matrices éléments finis correspondantes. La principale force de cette bibliothèque était la présence de méthodes d'éléments finis de hauts et de très hauts degrés.

Avec l'aide de Grégory Vial, qui fut mon professeur durant mes années en tant qu'élève de l'École Normale Supérieure de Cachan à l'Antenne de Bretagne, nous avons exploré une méthode d'éléments finis continus de Lagrange de hauts degrés qui venait compléter les méthodes déjà présentes dans la littérature pour ce type d'équations. On citera bien sûr les méthodes d'éléments finis de bas degrés, les analyses iso-géométriques, les méthodes de Galerkin discontinues, les méthodes adaptatives de raffinement de maillage ou de pas de temps, les méthodes multi-grilles, les méthodes de level-set, et les méthodes de raffinements locaux. Je pourrais citer ce travail dans une autre partie, car il s'inscrit davantage dans les méthodes déterministes. Mais je détaille ici son application, car il est le point de départ pour la prochaine partie de ce mémoire qui traite d'algorithmes numériques. Et il illustre correctement des résultats d'approximation qui ont été utilisés dans les résultats théoriques précédents.

Cette méthode d'éléments finis de hauts degrés semblait particulièrement adaptée au cadre stochastique, car on s'attend à une très faible régularité des solutions stochastiques, représentée par des oscillations à la fois spatiales et temporelles. Les éléments finis de hauts degrés possèdent la particularité de capter ces oscillations (tout du moins spatiales). On parle de p -version : on augmente le degré du polynôme plutôt que de raffiner le maillage (h -version) (cf. [BSK81]). Cette méthode a démontré ses capacités pour la propagation [Ain04, IB95, IB97], la simulation de singularités de coins [SS89], ou les problèmes fortement oscillants [BNDMV07].

De plus, suivant les résultats annoncés précédemment, il semblait intéressant de considérer des non-linéarités polynomiales et d'étudier le comportement des solutions lorsque le degré du polynôme augmente. Plusieurs auteurs font le choix de remplacer les énergies de type logarithmique par une énergie en forme de double puits d'ordre 4, notamment pour éviter les valeurs singulières en ± 1 . De manière plus générale, on peut étudier l'influence d'une approximation polynomiale de cette énergie logarithmique. Cette étude a été réalisée dans mon article avec Daniel Martin et Grégory Vial (cf. [GMV12]) où l'on

considérerait des potentiels de la forme

$$\begin{aligned} V &:= u \mapsto T_c \left(\frac{1-u^2}{2} \right) + T \left[-\ln(2) + \frac{1-u}{2} \ln(1-u) + \frac{1+u}{2} \ln(1+u) \right] + K_\infty \\ &= T_c \left(\frac{1-u^2}{2} \right) + T \left[-\ln(2) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{u^{2p}}{2p(2p-1)} \right] + K_\infty \end{aligned}$$

approché par son développement de Taylor d'ordre $2n$

$$V_{2n} := u \mapsto \left(T_c \left(\frac{1-u^2}{2} \right) + T \left[-\ln(2) + \sum_{p=1}^n \frac{u^{2p}}{2p(2p-1)} \right] \right) + K_{2n}.$$

défini à une constante additive près, choisie d'après des principes d'équilibre stationnaire décrits dans [GMV12].

Les solutions pour les potentiels polynomiaux ne sont alors plus contraintes à vivre dans l'espace physique $[-1, 1]$, mais elles restent proches au niveau de la dynamique ou des états stationnaires de la solution de référence pour le potentiel logarithmique. On peut trouver dans l'article [GMV12] des simulations numériques décrivant plusieurs quantités d'intérêt que sont la décroissance de l'énergie, la vitesse de la décomposition spinodale, la taille d'interface ou le comportement asymptotique. De plus, une étude de la limite en interface fine a été amorcée. Tous ces résultats sont présents dans [Gou09a], avec également des résultats numériques dans le cadre stochastique, et notamment l'étude des mesures de réflexion.

5 Projets et perspectives

Dans cette première partie de mon mémoire, j'ai tenté de résumer les résultats théoriques obtenus sur l'existence de solutions pour des équations aux dérivées partielles stochastiques de type Cahn-Hilliard. Le traitement des singularités reste le coeur de ce travail, car on souhaite obtenir des solutions physiques vivant dans l'espace $[-1, 1]$. On montre que les solutions peuvent être obtenues en considérant directement les non-linéarités, modulo l'ajout d'une mesure de réflexion. La simulation numérique de ces équations va donc nécessiter l'ajout d'une méthode de traitement de la mesure de réflexion dont on suppose qu'elle est effectivement active dans le cas d'une double singularité logarithmique aux points ± 1 en concordance avec les résultats obtenus pour une seule singularité logarithmique.

Simulations numériques de solutions approchées

Des avancées ont été réalisées afin de prendre en compte cette mesure de réflexion. Les résultats disponibles dans [Gou09a] montrent qu'on peut traiter les mesures de réflexion à l'aide de méthodes de pénalisation ou de rejet. En effet, grâce aux résultats théoriques d'approximation polynomiale ou lipschitzienne, on sait qu'on peut tronquer/régulariser les fonctions non-linéaires proches de la singularité, et considérer les solutions approchées. Par un procédé de simulation récursif, si une solution traverse la barrière physique en ± 1 , alors on la rejette, et on augmente le degré du polynôme, ou on repousse la troncature lipschitzienne vers la singularité, pour simuler une nouvelle solution. On obtient une famille de solutions des équations approchées mais qui possèdent des niveaux de troncature différents, ce qui n'est pas acceptable. On doit obtenir un niveau de troncature uniforme. Pour un niveau $n \in \mathbb{N}$ de troncature élevé, on suppose que le rejet n'arrive quasiment plus jamais. Cette probabilité p_n est mesurée par la masse présente dans la mesure de réflexion approchée η^n . En particulier si la mesure de réflexion limite η était identiquement nulle, on pourrait certainement exhiber une borne sur cette probabilité p_n pour un degré de troncature $n \in \mathbb{N}$. J'envisage d'étudier les formules d'intégration par parties afin d'exhiber cette borne qui permettrait de quantifier l'erreur commise.

Une autre méthode envisagée s'appuie d'avantage sur la formulation de [DZ07] pour laquelle les approximations de la mesure de réflexion sont obtenues par des méthodes de pénalisation de la partie négative. On pourrait effectivement envisager de simuler des solutions avec un facteur de pénalisation qui ne serait actif que pour les solutions non-physiques. La mesure de réflexion est vue comme un multiplicateur de Lagrange qui n'est actif qu'à la frontière. En effet, c'est exactement la notion exprimée dans les conditions de contact (10) et (11). De fait, on peut envisager une méthode récursive qui pénalise une solution par un facteur ϵ . Si la solution traverse la frontière physique à l'instant $t + \Delta t$ au-dessus d'un seuil fixé par l'utilisateur, alors on revient à l'instant t et on simule une nouvelle solution à l'instant $t + \Delta t/2$ pour un paramètre ϵ divisé par 2, puis un autre pas pour rejoindre l'instant $t + \Delta t$. Attention, on ne doit pas détruire le bruit simulé à l'instant $t + \Delta t$, en réalité on doit utiliser un bruit simulé en $t + \Delta t/2$ en conditionnant par la valeur déjà obtenue à l'instant $t + \Delta t$. De fait, la solution obtenue après deux pas de temps $\Delta t/2$ possède la bonne loi. On obtient un procédé récursif dans le cas où la solution à l'instant $\Delta t/2$ traverse une nouvelle fois la barrière physique au-dessus du seuil

fixé. Dans la figure 1, on illustre cette méthode sur une bulle posée sur le sol, attachée aux points 0 et 1 et dont les valeurs négatives sont pénalisées. On trace la solution obtenue à l'instant $t + \Delta t$.

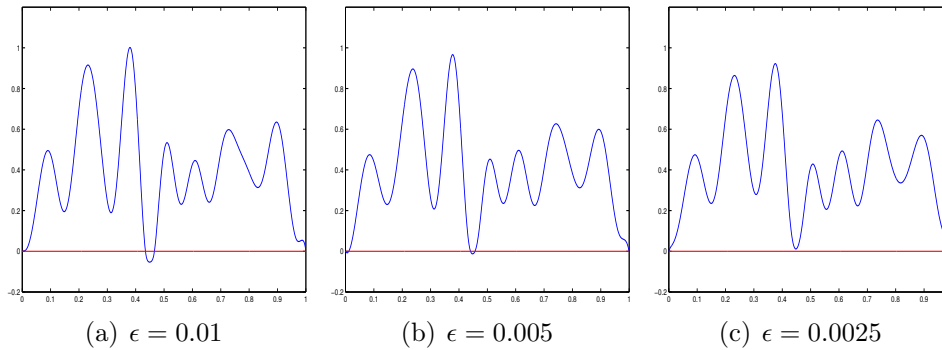


FIGURE 1 : Pénalisations successives pour des ϵ décroissants.

Le processus étant récursif, il pourrait ne pas terminer : les solutions pourraient traverser la barrière physique en de multiples endroits, la mesure de réflexion pourrait être si singulière qu'elle serait active à tout instant t . En pratique, ce n'est pas le cas, et le nombre d'itérations nécessaires est relativement faible. Dans la figure 2, on montre l'évolution du paramètre $\log(\epsilon)$ qui fut nécessaire pour obtenir une solution physique à l'instant t . On remarque que le paramètre ϵ reste relativement stable, et que le nombre de divisions est au pire de 4.

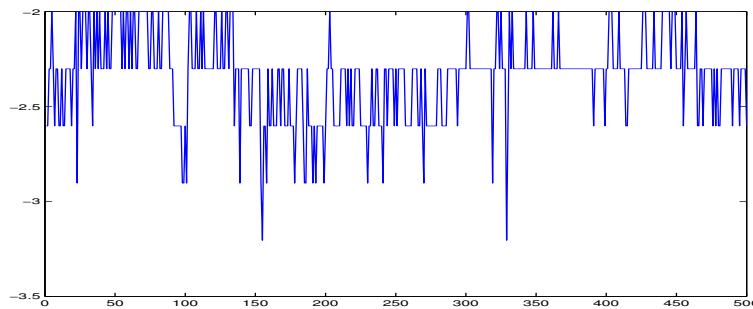


FIGURE 2 : Valeurs du paramètres de pénalisation ϵ au cours du temps.

Régularité des solutions

Toute simulation numérique repose sur la régularité du système simulé. Il était donc de première importance de montrer que les solutions des équations aux dérivées partielles de type Cahn-Hilliard sont continues en temps et en espace. Les théorèmes 3.3 et 3.8 stipulent que les solutions sont continues. Toutefois, dans le cas du bruit régulier et dégénéré, la continuité n'a pas été obtenue, mais comme on le précisait précédemment, un tel résultat est attendu. Les résultats très récents de Luigi Scarpa semblent indiquer qu'une continuité en temps dans V_1^* peut être obtenue dans le cas de potentiels singuliers pour des bruits assez généraux. Cette piste de recherche est bien sûr étudiée en collaboration avec Luigi Manca, mais pourrait constituer une direction de recherche pour un étudiant en thèse.

Sous des hypothèses plus fortes de contrôle sur les bruits et les données initiales, on pourrait montrer que la solution est continue dans V_0 et bornée dans V_1 .

Méthodes numériques nouvelles - Théorème de convergence

On obtiendrait alors la formulation variationnelle décrite par Luigi Scarpa qui ouvrirait le champ aux approximations numériques par des méthodes éléments finis pour lesquelles il existe des résultats dans [EL92] pour les approximations polynomiales dans le cas déterministe et dans [LM11, KLM11] pour les cas stochastiques linéarisé et cubique. En étendant les résultats d'ergodicité et d'existence d'une unique mesure invariante, on pourrait échantillonner cette mesure invariante via des simulations numériques, car on s'attend à une convergence exponentielle déjà obtenue dans [DG11]. On obtiendrait alors des théorèmes de convergence des approximations numériques pour des potentiels singuliers, et la convergence des méthodes d'échantillonnage de mesures invariantes à support dans K , le sous-espace des solutions physiques.

Couplage avec d'autres équations

Les méthodes de convergence développées avec Luigi Manca permettent de considérer des systèmes couplés, comme les équations de Navier-Stokes couplées avec les équations à formulation énergétique (de type Cahn-Hilliard). Ce système couplé est très classique dans l'étude des vésicules avec membranes, ou des bulles d'air ou d'huile qui se déplacent dans de l'eau. Par exemple, le système α -Navier-Stokes avec interaction d'une vésicule plongée dans un fluide possède une formulation énergétique qui permet d'utiliser des estimées *a priori* sur les solutions pour assurer la tension. On peut l'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \left(\partial_t(w + \alpha^2 Aw) + \nu A(w + \alpha^2 \Delta w) + \tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw) \right) & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ = \mathcal{P} \left(\frac{\delta E(u)}{\delta u} \nabla u \right) + \xi_w & \\ \nabla \cdot w = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \partial_t u + (w \cdot \nabla) u = -\gamma \frac{\delta E(u)}{\delta u} + \xi_u & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ v(0, x) = v_0(x) & \text{dans } \mathcal{D}, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \mathcal{D}. \end{array} \right.$$

où ρ est la densité du fluide w en dimension 2 ou 3, ν est la viscosité, la pression p a été éliminée par le projecteur de Leray \mathcal{P} , ξ_w et ξ_u sont des bruits réguliers, A est l'opérateur de Stokes, u est la ratio des deux espèces, γ un paramètre de force, E est l'énergie libre du système (de type Cahn-Hilliard). Ce travail est actuellement en cours. On cherche notamment à montrer l'existence d'une unique solution pour des régularités

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in L^p([0, T]; H^1(\mathcal{D})) \cap L^2([0, T]; D(A)) \\ u \in L^p([0, T]; H^2(\mathcal{D})) \cap L^2([0, T]; H^4(\mathcal{D})) \end{array} \right.$$

pour tout $p \geq 1$, dont les premiers résultats sont disponibles dans le preprint [P4].

Un autre exemple couplé concerne l'ajout d'une troisième espèce

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\partial_t v + \nu A v + (v \cdot \nabla)v) = -\nabla p + \lambda \nabla \cdot (\nabla u \otimes \nabla u) + \xi_v & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \nabla \cdot v = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \partial_t u + (v \cdot \nabla)u = \frac{\delta E(u, c)}{\delta u} + \xi_u & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \partial_t c + (v \cdot \nabla)c = \frac{\delta E(u, c)}{\delta c} + \xi_c & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ v(0, x) = v_0(x) & \text{dans } \mathcal{D}, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \mathcal{D}, \\ c(0, x) = c_0(x) & \text{dans } \mathcal{D}. \end{array} \right.$$

où E est l'énergie libre du système de Cahn-Hilliard couplé avec la seconde espèce c , λ est un terme de forces capillaires et ξ_c un bruit régulier. Ce travail est encore très prospectif. La version déterministe était l'objet d'un projet ANR dont j'étais membre associé en collaboration avec le laboratoire de physique de Rennes 1. Aujourd'hui il s'agit d'un projet de recherche ouvert concernant la version stochastique, et également un sujet démarré en collaboration avec Franck Boyer, Sébastien Minjeaud et Flore Nabet autour du choix des énergies libres, du caractère bien posé du système et de l'analyse numérique de schémas.

Deuxième partie

Algorithmes stochastiques

La première partie concernait les résultats théoriques concernant l'équation de Cahn-Hilliard stochastique et les prémices des simulations numériques associées. Dans un cadre plus général, mes recherches se sont orientées vers l'étude d'**algorithmes** efficaces pour la simulation des équations aux dérivées partielles stochastiques.

Dans cette seconde partie, je traiterai les résultats obtenus concernant divers **algorithmes stochastiques**, adaptés à l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques. Plusieurs difficultés apparaissent lorsqu'on essaye de simuler des équations aux dérivées partielles stochastiques. La première concerne bien évidemment la difficulté de représenter l'aléatoire. Même pour des problèmes impliquant des équations différentielles ordinaires, il existe une littérature très riche sur la multitude des approches numériques, sans même parler des **algorithmes numériques** utilisés pour simuler des nombres aléatoires. L'approche la plus connue reste bien entendu la méthode de Monte-Carlo qui fournit des estimateurs via la simulation numérique de nombreuses trajectoires. Bien que les vitesses de convergence de ces estimateurs soient relativement faibles (typiquement en $1/\sqrt{M}$ où M est le nombre de trajectoires simulées), on dispose d'intervalles de confiance empiriques qui permettent de vérifier assez simplement si on se situe dans un régime convergé. Cette méthode trouve des applications en mécanique, en finance, en assurance, en combustion, en énergétique, en fiabilité, en biologie, etc. On trouvera d'ailleurs dans les parties 3 et 4 comment ces approches de Monte-Carlo peuvent être battues par des **algorithmes déterministes**. Mais gardons à l'esprit que la quantification d'un phénomène aléatoire nécessite un grand nombre de réalisations aléatoires indépendantes.

La seconde difficulté concerne la simulation numérique d'une seule réalisation aléatoire. En effet, on est face à des équations aux dérivées partielles stochastiques, donc une seule réalisation aléatoire consiste en la résolution d'un problème d'équations aux dérivées partielles. C'est-à-dire au moins en dimension 1+1, le temps et l'espace. Le modèle qui avait ma préférence était bien sûr les équations de type Cahn-Hilliard, mais les difficultés rencontrées pour simuler ce type d'équations m'ont amené à considérer une équation qui précède historiquement l'équation de Cahn-Hilliard et qui fut élaborée par Allen et Cahn. Elle possède quasiment les mêmes propriétés sans toutefois assurer la conservation de la masse totale. C'est notamment cette réserve qui avait amené Cahn et Hilliard à reconsidérer le modèle d'Allen-Cahn dans le cas des mélanges diphasiques pour lesquels bien évidemment la conservation de la masse est une hypothèse physique essentielle, et c'est en ce sens que l'équation de Cahn-Hilliard est une amélioration du modèle d'Allen-Cahn. Aujourd'hui, elles sont utilisées dans des contextes physiques pour lesquels chacune fait sens, mais d'un point de vue numérique, l'équation d'Allen-Cahn est évidemment bien plus simple à simuler. Cette équation se retrouve donc naturellement comme modèle de base pour toute cette partie algorithmique.

Le point de départ de toute cette étude algorithmique est la construction de l'équipe CEMRACS 2013. Grâce au LabEx Bézout, j'ai eu la possibilité de m'associer à Mathias Rousset pour monter un projet d'encadrement de stage nommé "analyse et simulation de

systèmes aléatoires en grande dimension.” qui donnera lieu à la soumission d’un projet CEMRACS dans son exacte continuité. Nous étions aidés de Tony Lelièvre qui nous suggéra des pistes de réflexion. Je cite notre proposition de stage :

“Le but du stage sera l’étude et la simulation de modèles aléatoires Markoviens simplifiés en grande dimension. L’objectif pédagogique est d’introduire à l’aide d’un modèle simple à la fois les questions théoriques liées à la mécanique statistique (mesures de Gibbs, métastabilité des dynamiques), ainsi qu’à des problèmes numériques de simulations aléatoires (bilan détaillé, échantillonneur de Gibbs, Metropolis, accélération de la convergence à l’équilibre) qui peuvent apparaître par exemple en simulation moléculaire et physique statistique numérique.

Dans la deuxième partie du stage, on amènera l’étudiant à diagnostiquer les problèmes de convergences à l’équilibre du système en fonction de la rigidité γ . On introduira alors la notion d’énergie libre associée à une *coordonnée de réaction* ainsi que la méthode d’échantillonnage d’importance associée. On amènera l’étudiant à choisir une telle fonction d’importance et à faire des tests numériques. L’accent sera mis sur le concept de compromis biais/variance.”

David Iampietro fut le stagiaire qui répondit à l’annonce, tandis que Charles-Édouard Bréhier et Maxime Gazeau furent les étudiants qui constituèrent l’équipe CEMRACS. Encore aujourd’hui cette équipe est active, et de grandes avancées furent réalisées. Cette partie traite de l’ensemble des résultats que j’ai obtenus en collaboration avec Charles-Édouard Bréhier, Maxime Gazeau, Tony Lelièvre et Mathias Rousset. On peut aujourd’hui faire le bilan de ce projet initié en 2013. Plusieurs questions furent résolues et notamment les dernières questions : le choix de la fonction d’importance et de la coordonnée de réaction, et le compromis biais/variance. Notamment car notre résultat principal démontre qu’il n’y a pas de biais et ceci quelque soit le choix de la coordonnée de réaction.

Avant de détailler plus profondément le contenu de cette partie, il me faut citer les étudiants qui furent impliqués dans cette recherche :

- David Iampietro réalisa un stage durant le CEMRACS 2013. Il étudia la simulation numérique de mesures de Gibbs dans le contexte de dynamique “overdamped Langevin” par l’implémentation d’algorithmes de Metropolis-Hastings. Ses résultats numériques concernent l’estimation de temps de sortie et les tests de différentes *coordonnées de réaction* et permettent de comprendre la complexité de la dynamique d’Allen-Cahn en dimension petite, et notamment les biais induits par des implémentations erronées de l’algorithme AMS.
- Loïc Tudela qui fut encadré plus tard par Charles-Édouard Bréhier et moi-même pour démontrer un théorème de limite centrale pour les estimateurs AMS dans un cadre idéal. Il réalisa également les simulations numériques permettant d’illustrer cette convergence. Tous ces résultats sont présents dans [BGT16].
- Romain Poncet qui travailla durant sa thèse encadrée par Anne De Bouard sur les algorithmes hybrides de Metropolis-Hastings pour des dynamiques “overdamped Langevin”, et sur les schémas numériques pour l’équation stochastique projetée de Gross-Pitaevskii. En particulier ses résultats sur l’analyse de la métastabilité par des algorithmes AMS et les calculs de temps de transition. Tous ces résultats sont

disponibles dans sa thèse de doctorat [Pon17] pour laquelle je fus examinateur dans le jury. Il a également travaillé sur des dynamiques de Bose-Einstein et l'implémentation numérique des algorithmes de type AMS.

Dans cette partie, je vais décrire les notions essentielles sur les régularités des équations aux dérivées partielles stochastiques de type Allen-Cahn. J'expliquerai notamment les résultats obtenus en termes de moments et de régularité des équations de Kolmogorov associées. Puis je détaillerai les notions d'ordres de convergence faible et fort, ainsi que plusieurs variations de ces notions, qui sont des résultats théoriques obtenus sur les schémas numériques de splitting pour les équations aux dérivées partielles stochastiques de type Allen-Cahn. Enfin je détaillerai l'important résultat du caractère non-biaisé des estimateurs de type AMS, ainsi que leur généralisation connue sous l'acronyme GAMS (generalized adaptative multilevel splitting). Tout au long de cette partie, des simulations numériques viendront illustrer les résultats théoriques, notamment dans un contexte de dynamiques méta-stables pour les équations aux dérivées partielles stochastiques. Je cite dans leur ordre chronologique les publications qui se rapportent à cette partie orientée vers les **algorithmes stochastiques**.

[C2] Charles-Edouard Bréhier, Maxime Gazeau, Ludovic Goudenège et Mathias Rousset. Analysis and simulation of rare events for SPDE. *ESAIM Proceedings*, Janvier 2014.

[C3] Charles-Edouard Bréhier, Ludovic Goudenège et Loïc Tudela. Central Limit Theorem for Adaptive Multilevel Splitting Estimators in an Idealized Setting. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 163 :245–260, Juin 2016.

[P1] Charles-Edouard Bréhier, Maxime Gazeau, Ludovic Goudenège, Mathias Rousset et Tony Lelièvre. Unbiasedness of some generalized adaptive multilevel splitting algorithms. *arXiv preprint arXiv :1505.02674*, 2015. Version étendue de la version publiée dans *Annals of Applied Probability*.

[H7] Charles-Edouard Bréhier, Maxime Gazeau, Ludovic Goudenège, Mathias Rousset et Tony Lelièvre. Unbiasedness of some generalized Adaptive Multilevel Splitting algorithms. *Ann. Appl. Probab.*, 26(6) :3559–3601, 2016.

[P2] Charles-Edouard Bréhier et Ludovic Goudenège. Analysis of some splitting schemes for the stochastic Allen-Cahn equation. *arXiv preprint arXiv :1801.06455*, 2018.

[P3] Charles-Edouard Bréhier et Ludovic Goudenège. Weak convergence rates of splitting schemes for the stochastic allen-cahn equation. *arXiv preprint arXiv :1804.04061*, 2018.

6 Ordres faibles et forts pour les équations aux dérivées partielles stochastiques de type Allen-Cahn

On se place dans le même contexte que la partie précédente pour l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques. Tout comme pour le modèle de Cahn-Hilliard (cf. équation (7)), on considère une équation qui s'écrit sous une forme abstraite

$$\begin{cases} dX = AXdt + \Psi(X)dt + BdW, \\ X(0) = x. \end{cases}$$

avec des notations similaires, mais qui pourront être précisées ultérieurement en fonction du modèle étudié.

Précisément on considère le modèle d'Allen-Cahn avec des conditions aux bords de Dirichlet homogènes et des non-linéarités de la forme $\Psi = u - u^3$ (similaire à la fonction f_1 de l'équation (6) avec $\mu = 8/3$) qui est le cas le plus simple avec un potentiel en double puits.

Il existe également une solution à l'équation linéaire $\{Z(t, x)\}_{t \geq 0}$ pour la donnée initiale $x \in V_0$, et on peut montrer le résultat de régularité espace-temps suivant :

Théorème 6.1. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $T \in \mathbb{R}^+$, il existe une constante $C(T, \alpha) \in (0, \infty)$ telle que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ on a

$$\mathbb{E} [\|Z(t, x) - Z(s, y)\|_0^2] \leq C(T, \alpha) (|t - s|^{1/2-\alpha} + \|x - y\|_0^{1-\alpha}).$$

Le critère de Kolmogorov-Centzov montre que Z admet une version qui est $1/4 - \alpha$ hölderienne en temps, et $1/2 - \alpha$ hölderienne en espace, quel que soit $\alpha > 0$.

Ce résultat est bien sûr la base de l'étude des ordres faibles et forts pour ces équations. On ne peut pas raisonnablement espérer obtenir un ordre plus fort pour la solution avec une non-linéarité cubique.

6.1 Ordres faibles et forts

Les schémas numériques pour les équations aux dérivées partielles stochastiques ont été largement étudiés dans [JK11, Kru14, LPS14]. Par rapport aux discrétisations numériques pour les équations différentielles stochastiques, il faut étudier à la fois les discrétisations en temps et en espace. Et puisque la régularité en temps des solutions dépend fortement de la régularité du bruit, cela va affecter les ordres de convergence. Par exemple, si on considère des équations avec des non-linéarités globalement lipschitziennes, pour les équations différentielles, les solutions ont une régularité hölderienne d'ordre $\alpha < 1/2$, et le schéma d'Euler-Maruyama possède un ordre fort de convergence égal à $1/2$ et un ordre faible égal à 1. (cf. [KP92, Mil95]).

Pour les équations aux dérivées partielles stochastiques, dirigées par des bruits blancs espace-temps, les solutions ont une régularité hölderienne d'ordre $\alpha < 1/4$, et les schémas d'Euler (explicite et implicite) possède un ordre fort de convergence égal à $1/4$ et un ordre faible égal à $1/2$. On rappelle que l'ordre fort est un ordre en convergence quadratique (cf.

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

une littérature riche, comme par exemple [DG01, Gyö98, Gyö99, GM05, GM07, GN95, GN97, Jen11, JKW11, JK09, KS01, LT13, Pri01, Wan17]). L'ordre de convergence faible est un ordre de convergence en loi. On peut lire quelques contributions récentes dans [BD17, CJK14, Deb11, JK15].

Dans la prochaine section, on détaillera très rapidement différents types de convergence obtenus.

- convergence en moyenne quadratique, ou au sens des moindres carrés, sans ordre de convergence,
- convergence forte, avec un ordre $1/4$, par localisation sur un évènement de grande probabilité dans l'esprit de [BBM14],
- convergence en probabilité, avec un ordre $1/4$, dans l'esprit de [Pri01],
- convergence faible, avec un ordre $1/4$, par rejet des trajectoires explosives dans l'esprit de [MT05],
- convergence faible, avec un ordre faible $1/2$, sous hypothèse de régularité des fonctions tests.

Définition 6.2. Soit $T \in (0, \infty)$ et X la solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique dans un espace de Hilbert H . Soit $(X_n)_{0 \leq n \leq N_{T, \Delta t}}$ une famille finie de variables aléatoires donnée par un **algorithme numérique** décrit par un pas de temps Δt . On dira que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

- en moyenne quadratique, ou au sens des moindres-carrés,
si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\Delta t_0 \in (0, 1)$ tel que, pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$ alors

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq n \leq N_{T, \Delta t}} \|X_n - X(n\Delta t)\|_H^2 \right] \leq \varepsilon.$$

- fortement, avec un ordre $1/4$, par localisation sur un évènement de grande probabilité,
(dans l'esprit de [BBM14])

si pour tout $\alpha \in (0, 1/4)$ et $\Delta t_0 \in (0, 1)$, il existe $C_\alpha(T, \Delta t_0, M) \in (0, \infty)$, telle que, pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$ et $M \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\Omega_{T, \Delta t, M}^c} \sup_{0 \leq n \leq N_{T, \Delta t}} \|X_n - X(n\Delta t)\|_H^2 \right] \leq C_\alpha(T, \Delta t_0, M) \Delta t^{2\alpha}$$

avec $\mathbb{P}(\Omega_{T, \Delta t, M}^c) = o(1)$ quand $M \rightarrow +\infty$ uniformément en Δt .

- en probabilité, avec un ordre $1/4$,
(dans l'esprit de [Pri01])

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

si pour tout $\alpha \in (0, 1/4)$, $K \in (0, \infty)$, et $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\Delta t_0 \in (0, 1)$, telle que, pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq n \leq N_{T, \Delta t}} \|X_n - X(n\Delta t)\|_{\mathbb{H}} \geq K\Delta t^\alpha\right) \leq \varepsilon$$

- fortement, avec un ordre 1/4,

si pour tout $\alpha \in (0, 1/4)$ et $\Delta t_0 \in (0, 1)$, il existe une constante $C_\alpha(T, \Delta t_0) \in (0, \infty)$, telle que, pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq n \leq N_{T, \Delta t}} \|X_n - X(n\Delta t)\|_{\mathbb{H}}^2\right] \leq C_\alpha(T, \Delta t_0, M)\Delta t^{2\alpha},$$

- faiblement, avec un ordre 1/4, par rejet des trajectoires explosives,

(dans l'esprit de [MT05])

si pour tout $\alpha \in (0, 1/4)$, $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M = M_\alpha(\varepsilon, T, \Delta t_0) \in (0, \infty)$ et une constante $C = C_\alpha(\varepsilon, T, \Delta t_0) \in (0, \infty)$ telles que, pour toute fonction continue bornée lipschitzienne $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\|\varphi\|_\infty + \text{Lip}(\varphi) \leq 1$, et pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$

$$\left| \mathbb{E}\left[\varphi(X_{N_{T, \Delta t}}) \mathbf{1}_{\Omega_{T, \Delta t, M}^c}\right] - \mathbb{E}[\varphi(X(T))]\right| \leq \varepsilon + C\Delta t^\alpha.$$

avec $\mathbb{P}(\Omega_{T, \Delta t, M}^c) = o(1)$ quand $M \rightarrow +\infty$ uniformément en Δt .

- faiblement, avec un ordre 1/2, sous hypothèse de régularité des fonctions tests,

si pour tout $\alpha \in [0, 1/2)$, il existe une constante $C_\alpha(T, \Delta t_0) \in (0, \infty)$ telle que, pour toute fonction régulière $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ en une norme $\|\cdot\|$, et pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$

$$\left| \mathbb{E}[\varphi(X_{N_{T, \Delta t}})] - \mathbb{E}[\varphi(X(T))]\right| \leq C_\alpha(T, \Delta t_0)\|\varphi\|\Delta t^\alpha.$$

Remarque 6.3. La régularité des fonctions tests φ est essentielle pour obtenir un ordre faible qui soit le double de l'ordre fort (cf. [Bré17]).

Généralement, on peut étudier ces ordres en introduisant une équation auxiliaire qui dépend du pas de temps Δt .

$$\begin{cases} dX^{(\Delta t)} = AX^{(\Delta t)}dt + \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)})dt + BdW, \\ X^{(\Delta t)}(0) = x. \end{cases} \quad (14)$$

où $\Psi^{(\Delta t)} : H \rightarrow H$ est une approximation (généralement globalement Lipschitz) de Ψ . On s'attend à ce que la solution $X^{(\Delta t)}$ de cette équation auxiliaire possède plus de régularités que la solution X , et qu'elle en soit une bonne approximation. Par exemple, on recherche un résultat de la forme suivante :

Proposition 6.4. Soit $T \in (0, \infty)$ et $\Delta t_0 \in (0, 1)$. Il existe une constante $C(T, \Delta t_0) \in (0, \infty)$ telle que, pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left[\|X(t) - X^{(\Delta t)}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right] \leq C(T, \Delta t_0) \Delta t^2.$$

Alors on peut décomposer le terme d'erreur forte en deux parties :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\|X_n - X(n\Delta t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\|X_n - X^{(\Delta t)}(n\Delta t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right] + \mathbb{E} \left[\|X^{(\Delta t)}(n\Delta t) - X(n\Delta t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\|X_n - X^{(\Delta t)}(n\Delta t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right] + C(T, \Delta t_0) \Delta t^2. \end{aligned}$$

pour voir que l'ordre de convergence est effectivement seulement limité par la convergence de la famille finie X_n vers $X^{(\Delta t)}(n\Delta t)$.

Dans le cas de l'ordre faible, on obtient une estimation similaire en supposant que la fonction test φ est lipschitzienne :

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} [\varphi(X_{N_T, \Delta t})] - \mathbb{E} [\varphi(X(T))] \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E} [\varphi(X_{N_T, \Delta t})] - \mathbb{E} [\varphi(X^{(\Delta t)}(T))] \right| + \left| \mathbb{E} [\varphi(X^{(\Delta t)}(T))] - \mathbb{E} [\varphi(X(T))] \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E} [\varphi(X_{N_T, \Delta t})] - \mathbb{E} [\varphi(X^{(\Delta t)}(T))] \right| + [\phi]_{Lip} \mathbb{E} \left[\|X(t) - X^{(\Delta t)}(t)\|_{\mathbb{H}} \right] \\ & \leq \left| \mathbb{E} [\varphi(X_{N_T, \Delta t})] - \mathbb{E} [\varphi(X^{(\Delta t)}(T))] \right| + [\phi]_{Lip} \sqrt{C(T, \Delta t_0)} \Delta t \end{aligned}$$

et encore une fois, l'ordre de convergence est seulement limité par la convergence de la famille finie X_n vers $X^{(\Delta t)}(n\Delta t)$.

Donc si la famille X_n est donnée par un **algorithme numérique** déduit de l'évolution temporelle de $X^{(\Delta t)}$, on doit étudier l'erreur faite durant un pas de temps, et comment cette erreur se propage durant plusieurs pas de temps. Pour l'erreur faible, un argument de somme télescopique fournit l'estimation

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\varphi(X_{N_T, \Delta t})] - \mathbb{E} [\varphi(X^{(\Delta t)}(T))] = \mathbb{E} [u^{(\Delta t)}(0, X_{N_T, \Delta t}; \varphi)] - u^{(\Delta t)}(T, x; \varphi) \\ & = \sum_{k=1}^{N_T, \Delta t} \left(\mathbb{E} [u^{(\Delta t)}((N_T, \Delta t - k)\Delta t, X_k; \varphi)] - u^{(\Delta t)}((N_T, \Delta t - k + 1)\Delta t, X_{k-1}; \varphi) \right), \end{aligned}$$

où on a défini $u^{(\Delta t)}(t, x; \varphi)$ la solution de l'équation de Kolmogorov de condition initiale φ associée à l'équation aux dérivées partielles stochastiques auxiliaire de donnée initiale $x \in E$. On peut voir que les dérivées partielles $Du^{(\Delta t)}(t, x)$ et $D^2u^{(\Delta t)}(t, x)$ apparaissent dans le développement de l'erreur obtenu par cette décomposition. Dans le cas de la dimension infinie, les propriétés de régularité des solutions des équations de Kolmogorov sont essentielles pour obtenir l'ordre 1/2 (cf. [AL16, BD17, Deb11, WG13]).

6.2 Équations de Kolmogorov

La fonction $u^{(\Delta t)}$ joue un rôle essentiel dans l'analyse de l'erreur faible. Elle est la solution d'une équation de Kolmogorov en dimension infinie associée à l'équation auxiliaire (14).

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

Soit $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , de dérivées première et seconde bornées. Soit $x \in E := \mathcal{C}(\mathcal{D})$ une donnée initiale, on note $|\cdot|_E : x \mapsto \max_{\mathcal{D}} |x|$ la norme sur l'espace E .

Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$u^{(\Delta t)}(t, x; \varphi) = \mathbb{E} [\varphi(X^{(\Delta t)}(t, x))].$$

Formellement, $u^{(\Delta t)}$ est la solution de l'équation de Kolmogorov associée avec (14) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(\Delta t)}(t, x)}{\partial t} = \mathcal{L}^{(\Delta t)} u^{(\Delta t)}(t, x) &= \langle Ax + \Psi_{\Delta t}(x), Du^{(\Delta t)}(t, x) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2 u^{(\Delta t)}(t, x) \cdot (e_j, e_j), \end{aligned}$$

où les dérivées de première ordre dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ sont identifiées avec un élément de \mathbb{H} via le théorème de Riesz. Les dérivées de second ordre sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$.

Remarque 6.5. On peut donner un sens rigoureux à l'équation précédente par une procédure de régularisation. Puisque $\Psi_{\Delta t}$ est globalement lipschitzienne, pour un $\Delta t > 0$ fixé, cela peut être réalisé par une procédure standard d'approximation de Galerkin. Malheureusement, cet **algorithme d'approximation** ne permettrait pas de passer à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ dans les estimées, tout en conservant des bornes uniformes en le paramètre de régularisation.

À la place, on propose de remplacer le bruit dW dans (14) par un bruit $e^{\delta A} dW$, pour un paramètre de régularisation $\delta > 0$. Lorsque $\delta > 0$, les calculs deviennent rigoureux, et on obtient des propriétés de régularité pour les dérivées $Du^{(\Delta t)}(t, x)$ et $D^2 u^{(\Delta t)}(t, x)$, dont les bornes sont uniformes en le paramètre δ , ce qui permet de passer à la limite $\delta \rightarrow 0$.

L'ingrédient clé pour l'ordre faible consiste donc à montrer des estimées sur les dérivées première et seconde. On suit les idées développées dans [Deb11], puis étendues dans [BD17] pour des coefficients de diffusions non linéaires, et enfin généralisées dans mes articles [BG18a] et [BG18b] pour des coefficients non-globalement lipschitziens.

Plus précisément dans le cas de l'équation d'Allen-Cahn, on montre les deux théorèmes suivants :

Théorème 6.6. Soit $T \in (0, \infty)$ et $\Delta t_0 \in (0, 1]$. Pour tout $\alpha \in [0, 1)$, il existe une constante $C_\alpha(T, \Delta t_0) \in (0, \infty)$ telle que, pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0)$, $x \in E$, $h \in \mathbb{H}$ et $t \in (0, T]$,

$$|Du^{(\Delta t)}(t, x; \varphi) \cdot h| \leq \frac{C_\alpha(T, \Delta t_0)(1 + |x|_E^2) \|\varphi\|_{1, \infty}}{t^\alpha} |(-A)^{-\alpha} h|_{\mathbb{H}}.$$

Théorème 6.7. Soit $T \in (0, \infty)$ et $\Delta t_0 \in (0, 1]$. Pour tout $\beta, \gamma \in [0, 1)$, sous la condition $\beta + \gamma < 1$, il existe une constante $C_{\beta, \gamma}(T, \Delta t_0) \in (0, \infty)$ et un entier M tels que, pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0)$, $x \in E$, $h, k \in \mathbb{H}$ et $t \in (0, T]$,

$$|D^2 u^{(\Delta t)}(t, x; \varphi) \cdot (h, k)| \leq \frac{C_{\beta, \gamma}(T, \Delta t_0)(1 + |x|_E^M) \|\varphi\|_{2, \infty}}{t^{\beta + \gamma}} |(-A)^{-\beta} h|_{\mathbb{H}} |(-A)^{-\gamma} k|_{\mathbb{H}}.$$

Remarque 6.8. Je dois faire remarquer que la puissance α est choisie dans $[0, 1)$, mais que les résultats classiques et généraux utilisent des puissances plus faibles, typiquement $\alpha \in [0, 1/2)$. Il faut garder à l'esprit que ce n'est pas vraiment en contradiction, car cette puissance dépend de l'équation aux dérivées partielles stochastique étudiée. De la même manière, on choisit $\beta, \gamma \in [0, 1)$ tels que $\beta + \gamma < 1$, au lieu de la condition classique $\beta, \gamma \in [0, 1/2)$. Il faut de toute manière tenter d'obtenir la puissance maximale la plus grande possible, car cela simplifie nettement le traitement de certains termes d'erreurs.

Remarque 6.9. On peut remarquer que les normes $\|\cdot\|_{1,\infty}$ et $\|\cdot\|_{2,\infty}$ apparaissent naturellement. Avec $h, k \in \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$, et $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} Du^{(\Delta t)}(t, x; \varphi).h &= \mathbb{E} [D\varphi(X^{(\Delta t)}(t, x)).\eta^h(t, x)], \\ D^2u^{(\Delta t)}(t, x; \varphi).(h, k) &= \mathbb{E} [D\varphi(X^{(\Delta t)}(t, x)).\zeta^{h,k}(t, x)] \\ &\quad + \mathbb{E} [D^2\varphi(X^{(\Delta t)}(t, x)).(\eta^h(t, x), \eta^k(t, x))], \end{aligned}$$

où les processus $\eta^h(\cdot, x)$ et $\zeta^{h,k}(\cdot, x)$ sont les solutions des équations aux dérivées partielles à coefficients aléatoires

$$\frac{d\eta^h(t, x)}{dt} = A\eta^h(t, x) + \Psi^{(\Delta t)'}(X^{(\Delta t)}(t, x))\eta^h(t, x),$$

avec la donnée initiale $\eta^h(0, x) = h$, et

$$\frac{d\zeta^{h,k}(t, x)}{dt} = A\zeta^{h,k}(t, x) + \Psi^{(\Delta t)'}(X^{(\Delta t)}(t, x))\zeta^{h,k}(t, x) + \Psi^{(\Delta t)''}(X^{(\Delta t)}(t, x))\eta^h(t, x)\eta^k(t, x),$$

avec la donnée initiale $\zeta^{h,k}(0, x) = 0$.

Remarquons dans le théorème 6.7 qu'on obtient un contrôle en $(1 + |x|_E^M)$, mais la puissance dépend de la non-linéarité. En réalité la puissance M dans le théorème 6.7 vaut $7 = 2 \times 2 + 2 + 1$. En effet, on utilise le théorème 6.6 pour contrôler un produit $\eta^h\eta^k$ (puissance en 2×2), et on utilise le degré polynomial (de la régularisation Lipschitzienne $\Psi^{(\Delta t)}$) de Ψ (ordre 3) à travers sa dérivée seconde (donc linéaire), et enfin sa dérivée première (donc en puissance de 2) via Gronwall. Pour des calculs explicites, on consultera [BG18b].

6.3 Modèle d'Allen-Cahn

Comme je le disais précédemment, c'est bien l'équation de Cahn-Hilliard qui était le point de départ de cette recherche. Notamment car j'avais déjà réalisé des simulations numériques pour échantillonner les dynamiques méta-stables, et j'avais commencé à rechercher avec Eric Gautier et Arnaud Debussche des formulations des régimes en grandes déviations.

Mais il est apparu que l'équation d'Allen-Cahn était plus simple à simuler dans un premier temps. Les bruits considérés étaient également plus réguliers, car la formulation en système gradient dans $H^{-1}(\mathcal{D})$ de l'équation de Cahn-Hilliard pose naturellement des problèmes de régularités.

Le modèle d'Allen-Cahn s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + \Psi(u) + \dot{\xi}, & \text{sur } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{D}, \end{cases}$$

où on se restreint à la dimension $d = 1$ avec $\mathcal{D} = (0, 1)$ et au cas $\Psi = u - u^3$.

Ce modèle est apparu en premier dans [AC79] pour modéliser un système binaire dont l'énergie libre est décrite par l'énergie de Ginzburg-Landau :

$$\mathcal{E}(u) := \int_{\mathcal{D}} \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} V(u) \right) d\theta$$

où u est la ratio entre les deux espèces, et V (une primitive de $-\Psi$) est un terme d'énergie potentielle. Elle possède la même dynamique de séparation de phase que l'équation de Cahn-Hilliard (qui en est une amélioration).

Tout comme l'équation de Cahn-Hilliard, l'équation d'Allen-Cahn possède une dynamique très riche et très bien documentée dans la littérature. On peut également citer des résultats récents très intéressants étudiés dans [HRW12]. Le comportement quand $\varepsilon \rightarrow 0$, comme dans le cas Cahn-Hilliard, a également été étudié par exemple dans [Fun95] en dimension 1 (avec des bruits blancs espace-temps), et dans [Fun99, Web10a] en plus grande dimension pour des bruits plus réguliers. On peut également citer les liens avec les mouvements par courbure moyenne étudiés dans [Ilm93, ESS92], et plusieurs techniques récentes semblent prometteuses (cf. [DLN01, LS98, Yip98]).

L'équation d'Allen-Cahn est également un modèle très populaire pour l'étude des événements rares en dimension infinie, voir par exemple des résultats dans [BGGR15, KORVE07, RBS16, VEW12].

On travaille toujours dans le cadre standard des équations aux dérivées partielles stochastiques. On pose $H = L^2(\mathcal{D})$, et $E = \mathcal{C}(\mathcal{D})$. Et on utilise les notations de la section 2. On note cette fois A l'opérateur linéaire sur H , tel que

$$\begin{cases} D(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1) \\ Ax = \Delta x, \quad \forall x \in D(A). \end{cases}$$

Les vecteurs propres $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui forment une base Hilbertienne de $L^2(0, 1)$ sont donnés par la formule explicite $e_n = \sqrt{2} \sin(n\pi \cdot)$ avec $\lambda_n = n^2 \pi^2$ tels que $Ae_n = -\lambda_n e_n$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|e_n|_E \leq \sqrt{2}$. L'opérateur A génère un semi-groupe de résolution analytique $(e^{tA})_{t \geq 0}$, sur L^p pour $p \in [2, \infty)$ et sur E .

On rappelle que le potentiel d'énergie $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est une primitive de $-\Psi$ est défini par

$$V(u) = \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2}.$$

La fonction Ψ vérifie une condition "one-sided" Lipschitz, telle que pour tout $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$,

$$(\Psi(u_2) - \Psi(u_1))(u_2 - u_1) \leq |u_2 - u_1|^2,$$

mais Ψ n'est pas globalement lipschitzienne.

On considère alors la forme abstraite de l'équation d'Allen-Cahn avec un bruit blanc espace-temps

$$\begin{cases} dX = AXdt + \Psi(X)dt + dW, \\ X(0) = x \in E \end{cases} \quad (15)$$

Même si Ψ n'est pas globalement lipschitzienne, on peut utiliser la condition "one-sided" Lipschitz pour montrer l'existence de solution (cf. [Cer01, Chapter 6]).

Proposition 6.10. Soit $T \in (0, \infty)$. Il existe une unique solution globale au sens "mild" $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ de l'équation (15), à valeurs dans E . De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_p(T) \in (0, \infty)$ telle que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|_E^{2p} \right] \leq C_p(T)(1 + |x|_E^{2p}).$$

Puisque la fonction non-linéaire Ψ n'est pas globalement lipschitzienne, il est attendu que les schémas explicites ne soient pas appropriés (à moins d'utiliser une stratégie "taming" comme dans [BGJK17, GSŠ16] par exemple). Les schémas complètement implicites sont très coûteux. Mais des schémas de splitting tels que ceux définis dans [KLL15a, KLL15b], avec une discrétisation implicite seulement pour la partie impliquant Ψ , peuvent être définis. La stratégie développée dans [BG18a] et [BG18b] consiste à remplacer ces étapes implicites par une solution explicite du flot non-linéaire, suivant les idées décrites dans [JLL⁺16, LL15]. C'est également cette stratégie qui est utilisée dans la section 7.4.

6.4 Schémas de splitting

Les schémas de splitting suivants se basent sur la résolution explicite d'un flot non-linéaire associé à la fonction non-linéaire Ψ . C'est Maxime Gazeau qui proposa l'utilisation de ce splitting, au début simplement dans le but d'accélérer les simulations numériques. En effet nous essayions d'échantillonner des quantités trajectorielles, et il nous fallait pour cela pouvoir calculer rapidement (même approximativement) les solutions d'une équation aux dérivées partielles stochastique de type Allen-Cahn. En découpant les zones linéaires et non-linéaires, on s'est aperçu que le flot non-linéaire pouvait être résolu de manière exacte. Il n'en fallait pas plus pour nous convaincre de l'utiliser dans les simulations numériques. C'est simplement plus tard que nous nous sommes rendus compte que ce splitting fournissait également le moyen de contrôler les termes d'erreurs.

On s'intéresse donc à l'équation différentielle

$$\dot{z} = \Psi(z), \quad z(0) = z_0 \in \mathbb{R}.$$

Le flot Φ_t de cette équation est connu, et l'unique solution $(z(t))_{t \geq 0}$ est donnée explicitement par la formule

$$z(t) = \Phi_t(z_0) = \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + (1 - z_0^2)e^{-2t}}}, \quad t \geq 0.$$

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

Le schéma de splitting proposé peut être écrit sous sa forme abstraite suivante. Soit $\Delta t > 0$ un pas de temps fixé, alors l'**algorithme numérique** suivant

$$\begin{cases} Y_n^{(\Delta t)} = \Phi_{\Delta t}(X_n^{(\Delta t)}), \\ X_{n+1}^{(\Delta t)} = \Gamma(Y_n^{(\Delta t)}, \Delta t, (W(t))_{n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t}). \end{cases} \quad (16)$$

défini une famille finie d'éléments $\{X_n^{(\Delta t)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $X_0^{(\Delta t)} = x \in \mathbb{E}$, où Φ_t est étendue aux fonctions continues par composition évidente.

Plus exactement, il reste à préciser l'application Γ , qui doit correspondre à une approximation de l'équation aux dérivées partielles stochastique linéaire !

On présente trois exemples possibles :

$$\begin{cases} \Gamma^{\text{exact}}(y, \Delta t, (W(t))_{n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t}) = e^{\Delta t A} y + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{((n+1)\Delta t - t)A} dW(t), \\ \Gamma^{\text{expo}}(y, \Delta t, (W(t))_{n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t}) = S_{\Delta t}^{\text{expo}} y + S_{\Delta t}^{\text{expo}} \Delta W_n, \\ \Gamma^{\text{imp}}(y, \Delta t, (W(t))_{n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t}) = S_{\Delta t}^{\text{imp}} y + S_{\Delta t}^{\text{imp}} \Delta W_n \end{cases}$$

où $\Delta W_n = W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)$ sont des incréments de processus de Wiener, et avec les opérateurs linéaires

$$S_{\Delta t}^{\text{expo}} = e^{\Delta t A} \quad \text{et} \quad S_{\Delta t}^{\text{imp}} = (I - \Delta t A)^{-1}.$$

Dans la section 6.7, d'autres splitting seront proposés. Remarquons que l'utilisation du schéma avec $\Gamma = \Gamma^{\text{exact}}$ procède par deux sous-étapes qui sont résolues de manière exacte. Au contraire, dans les autres exemples, il y a une discrétisation du processus de Wiener, et donc une erreur liée directement à l'écart avec la convolution stochastique. On note de manière évidente $X_n^{(\Delta t), \text{exact}}$, $X_n^{(\Delta t), \text{expo}}$ et $X_n^{(\Delta t), \text{imp}}$, quand on choisit $\Gamma = \Gamma^{\text{exact}}$, $\Gamma = \Gamma^{\text{expo}}$ et $\Gamma = \Gamma^{\text{imp}}$ respectivement.

6.5 Équations auxiliaires

On va définir les équations auxiliaires en introduisant une régularisation de la fonction non-linéaire Ψ . Posons Ψ_t , pour $t > 0$, telle que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\Psi^{(t)}(u) = \frac{\Phi_t(u) - u}{t}.$$

Cette fonction est globalement lipschitzienne. Remarquons aussi que la limite $t \rightarrow 0$ existe, et $\Psi^{(0)}$ est exactement la fonction Ψ . On retrouve alors la forme annoncée de l'équation (14) qu'on rappelle ici

$$\begin{cases} dX^{(\Delta t)} = AX^{(\Delta t)}dt + \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)})dt + BdW, \\ X^{(\Delta t)}(0) = x. \end{cases} \quad (17)$$

On peut voir les schémas définis par (16) comme des schémas numériques standards pour les équations auxiliaires (17). En effet

$$\begin{cases} X_{n+1}^{(\Delta t), \text{exact}} = e^{\Delta t A} X_n^{(\Delta t), \text{exact}} + \Delta t e^{\Delta t A} \Psi^{(\Delta t)}(X_n^{(\Delta t), \text{exact}}) + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{((n+1)\Delta t - t)A} dW, \\ X_{n+1}^{(\Delta t), \text{expo}} = S_{\Delta t}^{\text{expo}} X_n^{(\Delta t), \text{expo}} + \Delta t S_{\Delta t}^{\text{expo}} \Psi^{(\Delta t)}(X_n^{(\Delta t), \text{expo}}) + S_{\Delta t}^{\text{expo}} \Delta W_n, \\ X_{n+1}^{(\Delta t), \text{imp}} = S_{\Delta t}^{\text{imp}} X_n^{(\Delta t), \text{imp}} + \Delta t S_{\Delta t}^{\text{imp}} \Psi^{(\Delta t)}(X_n^{(\Delta t), \text{imp}}) + S_{\Delta t}^{\text{imp}} \Delta W_n. \end{cases}$$

où les trois schémas sont bien définis pour toutes valeurs du pas de temps $\Delta t > 0$ car la fonction $\Psi^{(\Delta t)}$ est globalement lipschitzienne.

6.6 Analyse de convergence des schémas de splitting

Je ne détaillerai pas ici tous les détails de l'analyse de convergence, j'aimerais simplement en donner les idées importantes. Le premier résultat important concerne les estimations sur les fonctions $\Phi_{\Delta t}$ et $\Psi^{(\Delta t)}$. On peut montrer qu'elles sont toutes les deux globalement lipschitziennes, et que la constante de Lipschitz de Φ_t est bornée uniformément pour $\Delta t \in [0, \Delta t_0]$, mais pas celle de $\Psi^{(\Delta t)}$ qui explose en $\Delta t = 0$. Toutefois $\Psi^{(\Delta t)}$ vérifie une condition "one-sided" Lipschitz pour une constante de Lipschitz qui est bornée uniformément pour $\Delta t \in [0, \Delta t_0]$. On peut également montrer que $\Psi^{(\Delta t)}$ est localement lipschitzienne pour une constante de Lipschitz locale qui est bornée uniformément pour $\Delta t \in [0, \Delta t_0]$ et par des puissances 3 de z . C'est notamment cette raison qui nous force à introduire des arguments de localisation sur des événements de grande probabilité. Précisément on aura besoin de définir pour $M \in \mathbb{N}$, et $n \in \{0, \dots, N\}$, les événements

$$\Omega_{n,M}^{(\Delta t)} = \left\{ \sup_{0 \leq k \leq n} |X_k|_E + \sup_{0 \leq t \leq n\Delta t} |X^{(\Delta t)}(t)|_E \leq M \right\}.$$

De plus, on a des résultats de contrôle tels que pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$|\Psi^{(\Delta t)}(z)| \leq C(\Delta t_0)(1 + |z|^4), \quad (18)$$

et

$$|\Psi_{\Delta t}(z) - \Psi_0(z)| \leq C(\Delta t_0)\Delta t(1 + |z|^5).$$

avec une constante $C(\Delta t_0)$ qui est la borne uniforme des constantes $C(\Delta t)$ pour $\Delta t \in [0, \Delta t_0]$.

Cela nous pousse à étudier les moments de la famille $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Fixons un horizon de temps $T \in (0, \infty)$, et Δt le pas de temps de l'**algorithme numérique**. On pose $N_{T,\Delta t} = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor$ et $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N_{T,\Delta t}}$ la famille définie par un des schémas (16), alors on a la proposition suivante.

Proposition 6.11. Soit $T > 0$ et $\Delta t_0 \in (0, 1)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_p(T, \Delta t_0) \in (0, \infty)$ telle que pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$ et pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq n \leq N_{T,\Delta t}} |X_n|_E^{2p} \right] \leq C_p(T, \Delta t_0)(1 + |x|_E^{2p}).$$

On a besoin du même genre de résultats sur les autres termes impliqués dans le splitting. Mais pour ceux-ci les étapes sont linéaires, donc on se ramène aux études classiques de régularité et d'estimation de moments.

Faisons maintenant rapidement la preuve de la convergence en ordre fort, avec la localisation sur un événement de grande probabilité. Par la proposition 6.4, il suffit de regarder l'erreur $X_n - X^{(\Delta t)}(n\Delta t)$.

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

On note $(\omega_n)_{n=0,\dots,N_{T,\Delta t}}$ la suite définie par $\omega_0 = 0$, et

$$\omega_{n+1} = \Gamma(\omega_n, \Delta t, (W(t))_{n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t})$$

Et en posant $r_n = X_n - \omega_n$, alors on peut remarquer que

$$X_{n+1} - S_{\Delta t}X_n - \Delta t S_{\Delta t} \Psi^{(\Delta t)}(X_n) = \omega_{n+1} - S_{\Delta t}\omega_n,$$

donc

$$r_{n+1} = S_{\Delta t}r_n + \Delta t S_{\Delta t} \Psi^{(\Delta t)}(X_n).$$

En injectant $r_0 = X_0 = x$, par induction, on trouve

$$X_n - \omega_n = r_n = S_{\Delta t}^n x + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} S_{\Delta t}^{n-k} \Psi^{(\Delta t)}(X_k).$$

D'où la décomposition fondamentale de l'erreur

$$\begin{aligned} X_n - X^{(\Delta t)}(n\Delta t) &= (S_{\Delta t}^n - e^{n\Delta t})x + \omega_n - Z(n\Delta t, 0) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} [S_{\Delta t}^{n-k} \Psi^{(\Delta t)}(X_k) - e^{(n\Delta t-t)A} \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(t))] dt. \end{aligned}$$

où on rappelle que $Z(t, 0)$ est la solution linéaire pour une donnée initiale 0, parfois notée W^A la convolution stochastique, et qu'elle vérifie des contrôles tels que pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq n \leq N_{T,\Delta t}} \|\omega_n - Z(n\Delta t, 0)\|_H^2 \right] \leq C_\alpha(T, \Delta t_0) \Delta t^{2\alpha}.$$

De plus il existe une constante $C_\alpha \in (0, \infty)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(S_{\Delta t}^n - e^{n\Delta t})x\|_H \leq C_\alpha \Delta t^\alpha \|(-A)^\alpha x\|_H.$$

Il ne reste donc plus qu'à traiter le troisième terme. On écrit grossièrement pour effacer les deux premiers termes déjà traités

$$\begin{aligned} X_n - X^{(\Delta t)}(n\Delta t) &\lesssim \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} [S_{\Delta t}^{n-k} \Psi^{(\Delta t)}(X_k) - e^{(n\Delta t-t)A} \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(t))] dt \\ &= \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} S_{\Delta t}^{n-k} [\Psi^{(\Delta t)}(X_k) - \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(k\Delta t))] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} S_{\Delta t}^{n-k} [\Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(k\Delta t) - \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(t))] dt \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} [S_{\Delta t}^{n-k} - e^{(n\Delta t-t)A}] \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(t)) dt \end{aligned}$$

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

On reconnaît trois termes différents. Si $\Psi^{(\Delta t)}$ était globalement lipschitzienne, le premier serait un terme d'erreur à l'ordre $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Le deuxième terme serait un terme de régularité de la solution $X^{(\Delta t)}$ qui possède la régularité hölderienne d'ordre $1/4$. Le troisième terme est un terme de discrétisation du schéma qui est contrôlé en horizon fini $T > 0$ par $\Delta t^\alpha \Psi^{(\Delta t)}(\cdot)$ qui ne grossit pas plus vite qu'un polynôme d'ordre 4 d'après l'équation (18). Dans le cas du schéma Γ^{exact} , ce terme est même identiquement nul.

Mais $\Psi_{\Delta t}$ n'est pas globalement lipschitzienne, donc le raisonnement précédent ne tient pas. On introduit alors la localisation pour obtenir une estimation de type Gronwall sur $\epsilon_n^M = \mathbf{1}_{\Omega_{n,M}^{(\Delta t)}} \|X_n - X^{(\Delta t)}(n\Delta t)\|_{\mathbb{H}}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq m \leq n} \epsilon_m^M \right] &\leq C \sup_{0 \leq m \leq n} \|(S_{\Delta t}^m - e^{m\Delta t})x\|_{\mathbb{H}}^2 + C\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq m \leq n} \|\omega_m - W^A(m\Delta t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right] \\
&+ CT\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\Omega_{k,M}^{(\Delta t)}} \|\Psi^{(\Delta t)}(X_k) - \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(k\Delta t))\|^2 \right] \\
&+ CT \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbb{E} \|\Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(k\Delta t)) - \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(t))\|^2 dt \\
&+ CT \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbb{E} \left\| [S_{\Delta t}^{n-k} - e^{(n\Delta t-t)A}] \Psi^{(\Delta t)}(X^{(\Delta t)}(t)) \right\|_{\mathbb{H}}^2 dt \\
&\leq C_\alpha(T, \Delta t_0) (1 + \|(-A)^\alpha x\|_{\mathbb{H}}^2) \Delta t^{2\alpha} \\
&+ C(1 + M^6) T \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq m \leq k} \epsilon_m^M \right] \\
&+ C_\alpha(T) (1 + M^6) \Delta t^{2\alpha} \\
&+ C_\alpha(T) (1 + |x|_E^8) \Delta t^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Les puissances 6 viennent évidemment de la régularité cubique prise au carré. La puissance 8 vient de la croissance en puissance 4 de $\Psi^{(\Delta t)}$ prise au carré.

On applique le lemme de Gronwall discret pour obtenir

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq m \leq n} \epsilon_m^M \right] \leq K_\alpha(T, \Delta t_0, M) \Delta t^{2\alpha} (1 + |x|_E^8 + \|(-A)^\alpha x\|_{\mathbb{H}}^2).$$

avec K_α une constante faisant intervenir $C_\alpha(T, \Delta t_0)$ et des puissances de M . Pour conclure, il suffit de l'appliquer à $n = N_{T,\Delta t}$, en remarquant que l'évènement est $\Omega_M^{(\Delta t)}(T) := \Omega_{N_{T,\Delta t},M}^{(\Delta t)}$ est bien de grande probabilité. En effet

$$1 - \mathbb{P}(\Omega_{N_{T,\Delta t},M}^{(\Delta t)}) \leq \frac{\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq k \leq N_{T,\Delta t}} |X_k|_E + \sup_{0 \leq t \leq T} |X^{(\Delta t)}(t)|_E \right]}{M} \leq \frac{C(T, \Delta t_0) (1 + |x_0|_E)}{M},$$

grâce aux propositions 6.10 (pour l'équation auxiliaire) et 6.11.

On obtient le résultat principal de l'article [BG18a], qu'on consultera pour une preuve plus complète.

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

Théorème 6.12. Soit $T \in (0, \infty)$, $\Delta t_0 \in (0, 1)$, et $\alpha \in (0, 1/4)$. Il existe une constante $C_\alpha(T, \Delta t_0) \in (0, \infty)$, telle que, pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$, $M \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, avec $\|(-A)^\alpha x\|_H < \infty$

$$\mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\Omega_M^{(\Delta t)}(T)} \sup_{0 \leq n \leq N_{T, \Delta t}} \|X_n - X(n\Delta t)\|_H^2 \right] \leq K_\alpha(M, T, \Delta t_0) \Delta t^{2\alpha} (1 + |x|_E^8 + \|(-A)^\alpha x\|_H^2)$$

avec $K_\alpha(M, T, \Delta t_0) \leq C_\alpha(T, \Delta t_0)(1 + M^6) \exp(C_\alpha(T, \Delta t_0)M^6)$, et

$$\Omega_M^{(\Delta t)}(T) = \left\{ \sup_{0 \leq k \Delta t \leq T} |X_k|_E + \sup_{0 \leq t \leq T} |X^{(\Delta t)}(t)|_E \leq M \right\}.$$

De plus, il existe une constante $C(T, \Delta t_0)$ telle que, pour tout $x \in E$, $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$ et tout $M \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\Omega_M^{(\Delta t)}(T)^c) \leq \frac{C(T, \Delta t_0)(1 + |x_0|_E)}{M}.$$

En ce qui concerne l'ordre faible, nous avons démontré dans [BG18b] les estimées des théorèmes suivants, sous des hypothèses de régularité des fonctions tests φ .

Hypothèse 1. La fonction $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 , et possède des dérivées première et seconde bornées telles que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{1, \infty} &= \sup_{x \in H, h \in H, |h|_H=1} |D\varphi(x).h| < \infty, \\ \|\varphi\|_{2, \infty} &= \|\varphi\|_{1, \infty} + \sup_{x \in H, h, k \in H, |h|_H=|k|_H=1} |D^2\varphi(x).(h, k)| < \infty. \end{aligned}$$

Théorème 6.13. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par le schéma exponentiel Γ^{expo} .

Soit $T \in (0, \infty)$, $\Delta t_0 \in (0, 1]$ et $x \in E$. Pour tout $\alpha \in [0, 1/2)$, il existe une constante $C_\alpha(T, \Delta t_0, |x|_E) \in (0, \infty)$ telle que pour φ satisfaisant l'hypothèse 1.

Pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$ et $N_{T, \Delta t} \in \mathbb{N}$, tels que $T = N_{T, \Delta t} \Delta t$,

$$|\mathbb{E}[\varphi(X(T))] - \mathbb{E}[\varphi(X_{N_{T, \Delta t}})]| \leq C_\alpha(T, \Delta t_0, |x|_E) \|\varphi\|_{1, \infty} \Delta t^\alpha, \quad (19)$$

Théorème 6.14. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par le schéma implicite Γ^{imp} .

Soit $T \in (0, \infty)$, $\Delta t_0 \in (0, 1]$ et $x \in E$. Pour tout $\alpha \in [0, 1/2)$, il existe une constante $C_\alpha(T, \Delta t_0, |x|_E) \in (0, \infty)$ telle que pour φ satisfaisant l'hypothèse 1.

Pour tout $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$ et $N_{T, \Delta t} \in \mathbb{N}$, tels que $T = N_{T, \Delta t} \Delta t$,

$$|\mathbb{E}[\varphi(X(T))] - \mathbb{E}[\varphi(X_{N_{T, \Delta t}})]| \leq C_\alpha(T, \Delta t_0, |x|_E) \|\varphi\|_{2, \infty} \Delta t^\alpha. \quad (20)$$

Remarque 6.15. Les théorèmes 6.13 et 6.14 sont des généralisations naturelles des résultats obtenus pour les équations aux dérivées partielles stochastiques dans le cas de régularités globalement lipschitziennes (cf. [Deb11]). On obtient notamment le même ordre faible 1/2 qui est le double de l'ordre fort.

A partir de maintenant, on peut facilement déduire tous les résultats de convergence annoncés de la définition 6.2.

6.7 Simulation numériques

Cette section concerne les simulation numériques qui permettent d'illustrer les propriétés des schémas numériques (16), avec le choix $\Gamma = \Gamma^{\text{imp}}$. C'est-à-dire

$$\begin{cases} Y_n = \Phi_{\Delta t}(X_n), \\ X_{n+1} = S_{\Delta t}Y_n + S_{\Delta t}(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)), \end{cases} \quad (21)$$

avec $S_{\Delta t} = (I - \Delta t A)^{-1}$. Toutes les simulations ont été réalisées avec ce choix, car on ne s'attend pas à un gain particulier d'ordre de convergence pour la version $\Gamma = \Gamma^{\text{exp}}$, avec $S_{\Delta t} = e^{\Delta t A}$. De plus, le calcul d'un intégrateur exponentiel peut s'avérer bien plus complexe, surtout si la dimension de \mathcal{D} est grande. On réalise également une discrétisation spatiale via une méthode de différences finies standard (cf. section 9 pour quelques détails), mais on ne discute pas la convergence de cette discrétisation.

Des variantes du schéma (21) ont également été testées. Ce sont tous des schémas de splitting, et on analyse juste leur ordre de convergence d'un point de vue numérique.

Premièrement, on compare les ordres de convergences fortes. D'un point de vue pratique, le théorème 6.12 s'applique sans se soucier de l'évènement $\Omega_M^{(\Delta t)}(T)$, et on imagine également qu'il s'applique aux autres schémas pour lesquels un ordre 1/4 est conjecturé.

Ensuite, on compare les ordres de convergences faibles. Ici aussi, les techniques de rejet des trajectoires explosives ne sont pas prises en compte (i.e. on peut prendre $\varepsilon = 0$ dans la définition 6.2). De plus les fonctions tests φ sont bien bornées avec des dérivées bornées comme le suggère l'hypothèse 1 des théorèmes 6.13 et 6.14.

Variantes des schémas numériques

On définit trois schémas numériques avec l'intégrateur implicite d'Euler $S_{\Delta t} = (I - \Delta t A)^{-1}$ et on utilise la notation $\Delta W_n = W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)$ pour les incréments de Wiener.

La méthode 1, donnée par le schéma (22), correspond au schéma (16) étudié théoriquement, dans le cas de l'intégrateur implicite d'Euler. La méthode 2, donnée par le schéma (23), est motivée par [KLL15b]. La méthode 3, donnée par le schéma (24), est motivée par [BGGR15].

Il semble que les trois méthodes sont relativement similaires, et que les erreurs sont stabilisées par un pas d'espace suffisamment petit, ce qui est une condition naturelle à imposer, puisqu'on ne souhaite pas étudier l'erreur spatiale.

Méthode 1

$$\begin{cases} Y_n^1 = \Phi_{\Delta t}(X_n^1), \\ X_{n+1}^1 = S_{\Delta t}X_n^1 + S_{\Delta t}\Delta W_n, \end{cases} \quad (22)$$

Méthode 2

$$\begin{cases} Y_n^{2,1} = S_{\frac{\Delta t}{2}} X_n^2 \\ Y_n^{2,2} = \Phi_{\Delta t}(Y_n^{2,1}) \\ X_{n+1}^2 = S_{\frac{\Delta t}{2}} (Y_n^{2,2} + \Delta W_n). \end{cases} \quad (23)$$

Méthode 3

$$\begin{cases} Y_n^{3,1} = S_{\frac{\Delta t}{2}} (X_n^3 + \frac{1}{2} \Delta W_n) \\ Y_n^{3,2} = \Phi_{\Delta t}(Y_n^{3,1}) \\ X_{n+1}^3 = S_{\frac{\Delta t}{2}} (Y_n^{3,2} + \frac{1}{2} \Delta W_n). \end{cases} \quad (24)$$

Convergence en ordre fort

Pour étudier les ordres forts, on doit comparer les trajectoires calculées sur la même trajectoire brownienne, ce qui contraint la construction des incréments de Wiener. Il est classique de comparer la solution pour le pas de temps Δt avec une solution de référence calculée pour un pas de temps bien plus petit. Mais on désire plutôt étudier l'erreur en moyenne quadratique :

$$\mathbb{E} \left[\|X_N^{(\Delta t)} - X_{2N}^{(\frac{\Delta t}{2})}\|_{\mathbb{H}}^2 \right]$$

où $X_N^{(\Delta t)}$ est toujours le schéma numérique pour le pas de temps Δt , et $N\Delta t = T$. Les erreurs sont calculées en utilisant les mêmes trajectoires de Wiener pour une valeur Δt , et on utilise des trajectoires indépendantes quand on change Δt . On doit vérifier que cette erreur est majorée par $C_\alpha(T)\Delta t^{2\alpha}$. Par un argument de somme télescopique, par la convergence en ordre fort, cette propriété est équivalente à l'estimée d'erreur en moyenne quadratique.

$$\mathbb{E} \left[\|X_N^{(\Delta t)} - X(T)\|_{\mathbb{H}}^2 \right] \leq C'_\alpha(T)\Delta t^{2\alpha}.$$

Techniquement parlant, l'ordre de convergence de l'erreur $\mathbb{E}\|X_N^{(\Delta t)} - X_{2N}^{(\frac{\Delta t}{2})}\|_{\mathbb{H}}^2$ est exactement la quantité d'intérêt dans l'analyse des algorithmes de Monte-Carlo à plusieurs niveaux (Multilevel Monte-Carlo), cela sera rappelé dans l'étude de l'ordre faible (cf. le prochain paragraphe).

Les simulations sont réalisées avec $T = 1$, une taille de pas de discrétisation d'espace $\Delta x = 2.5 \cdot 10^{-4}$, et on calcule une moyenne empirique par la méthode de Monte-Carlo sur 10^5 réalisations indépendantes. Les résultats numériques sont illustrés dans la figure 3 en échelle logarithmique. On peut observer que l'ordre de convergence en moyenne quadratique vérifie $2\alpha = 1/2$ pour les trois méthodes.

Convergence en ordre faible

L'ordre de convergence faible concerne l'étude de l'erreur

$$\mathbb{E} \left[\varphi \left(X_N^{(\Delta t)} \right) \right] - \mathbb{E}[\varphi(X(T))]$$

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

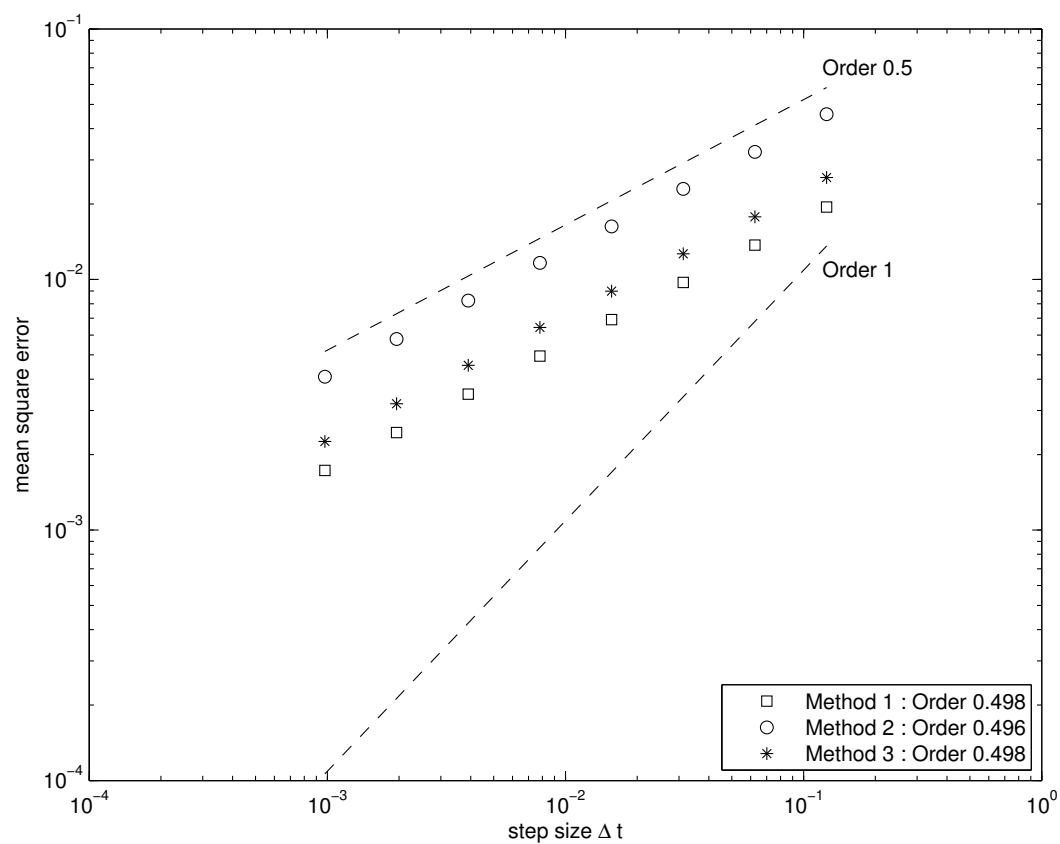


FIGURE 3 : Ordre de convergence en moyenne quadratique pour $T = 1$, $\Delta x = 2.5 \cdot 10^{-4}$ et 10^5 réalisations indépendantes.

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

où $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction test avec des propriétés de régularité. Précisément on a choisi

$$\varphi(x) = \exp(-5\|x\|_{\mathbb{H}}^2).$$

On souhaite vérifier que l'ordre de convergence faible est égal à $2\alpha = 1/2$, le double de l'ordre fort $\alpha = 1/4$.

Les simulations numériques pour les ordres faibles sont généralement bruitées par une erreur statistique, et il faut mettre en place des techniques de réduction de variance. Au lieu de comparer directement $\mathbb{E} [\varphi(X_N^{(\Delta t)})]$ avec une solution de référence, estimée par des simulations Monte-Carlo indépendantes et pour un pas de temps très petit, on va utiliser une méthode de Monte-Carlo à plusieurs niveaux, comme on l'avait annoncé précédemment. On analyse donc

$$\mathbb{E} [\varphi(X_N^{(\Delta t)})] - \mathbb{E} [\varphi(X_{2N}^{(\frac{\Delta t}{2})})]$$

en utilisant toujours les mêmes trajectoires de Wiener, mais pour des pas de temps différents Δt et $\frac{\Delta t}{2}$. Entre deux niveaux successifs, le pas de temps Δt est divisé par deux, et les simulations dans le sous-niveau sont calculées en utilisant des trajectoires de Wiener indépendantes. Contrairement aux techniques classiques de Monte-Carlo à plusieurs niveaux, le nombre de réalisations par niveau n'est pas optimisé (il reste le même). Mais on conserve quand même une réduction importante du coût de calcul nécessaire pour pouvoir observer les ordres faibles.

La comparaison de $\mathbb{E} [\varphi(X_N^{(\Delta t)})]$ avec une valeur de référence $\mathbb{E} [\varphi(X_N^{(\frac{\Delta t}{2^K})})]$ (estimée pour un pas de temps $\frac{\Delta t}{2^K}$ avec K grand) est obtenue par une reconstruction télescopique évidente.

Les simulations sont réalisées avec $T = 1$, une taille de pas de discrétisation d'espace $\Delta x = 2.5 \cdot 10^{-4}$, et on calcule une moyenne empirique par la méthode de Monte-Carlo sur 10^5 réalisations indépendantes. Les résultats numériques sont illustrés dans la figure 4 en échelle logarithmique. On peut observer que l'ordre de convergence faible vérifie $2\alpha = 1/2$ pour les trois méthodes, mais que de manière surprenante la méthode 2 semble plus efficace qu'on ne l'attendait.

6 ORDRES FAIBLES ET FORTS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ALLEN-CAHN

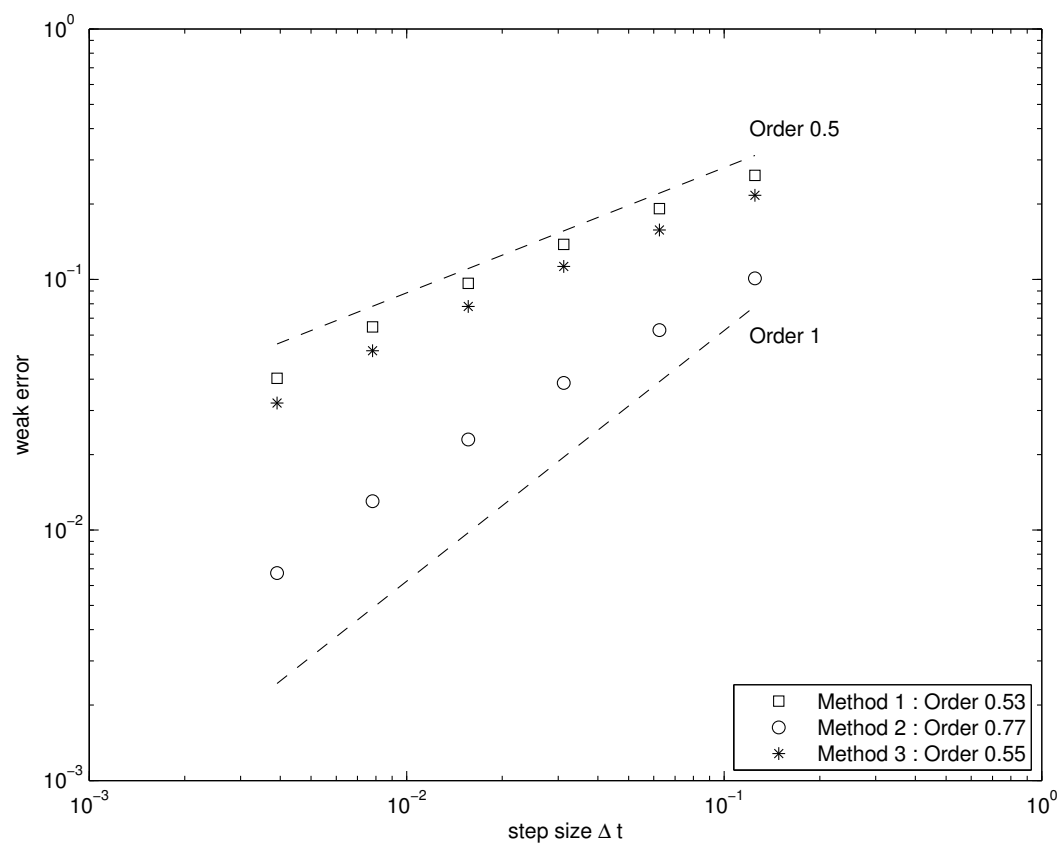


FIGURE 4 : Ordre de convergence faible pour $T = 1$, $\Delta x = 2.5 \cdot 10^{-4}$ et 10^5 réalisations indépendantes.

7 Algorithmes AMS généralisées : GAMS

L'échantillonnage d'évènements rares est un sujet très important dans de nombreuses applications, telles que la fiabilité ou la dynamique moléculaire. Par exemple, supposons qu'on possède une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue à l'aide d'un **algorithme** de discrétisation temporelle d'une équation de Langevin amortie

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} - X_n = -\nabla V(X_n) \Delta t + \sqrt{2\beta^{-1}}(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}). \quad (25)$$

typiquement en dimension très grande \mathbb{R}^{3N} pour représenter la position dans l'espace de N particules. La fonction $V : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel d'énergie, $\beta = (k_B T)^{-1}$ est l'inverse de la température, W est un processus de Wiener standard en dimension $3N$, et Δt est le pas de temps de la simulation.

Dans beaucoup de cas, cette dynamique (25) est méta-stable, dans le sens où les particules restent bloquées pendant très longtemps proche d'une configuration dite méta-stable, avant de pouvoir finalement s'en échapper. Ces zones sont généralement situées dans une zone proche des minima locaux du potentiel V . Cela correspond à une réalité physique, pour laquelle le temps typique de la réaction moléculaire est très faible devant l'échelle de temps de la méta-stabilité qui correspond au temps d'attente moyen avant la sortie de l'état méta-stable.

On note $A \subset \mathbb{R}^{3N}$ et $B \subset \mathbb{R}^{3N}$ deux états méta-stables disjoints. Le problème qui nous intéresse est le suivant : pour une condition initiale en dehors de A et B , et très proche de A , comment échantillonner les trajectoires qui atteignent B avant de rejoindre A ? Ces trajectoires particulières sont appelées trajectoires réactives. Leur échantillonnage est un moyen de comprendre les mécanismes de transition entre les états méta-stables.

D'un point de vue mathématique, étant donnée une fonction test $\varphi : (\mathbb{R}^{3N})^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ qui dépend de toute la trajectoire $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la chaîne de Markov, on veut calculer

$$\mathbb{E} [\varphi(\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \mathbb{1}_{\tau_B < \tau_A}] \quad (26)$$

où $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\}$, $\tau_B = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\}$ sont les temps d'atteinte des régions méta-stables et $X_0 = x \notin (A \cup B)$ est une donnée initiale fixée proche de A . La plupart des trajectoires partant de x vont rejoindre A bien avant de rejoindre B . Lorsque $\varphi = 1$, l'espérance précédente est exactement $\mathbb{P}(\tau_B < \tau_A)$ c'est-à-dire la probabilité que la chaîne de Markov atteigne B avant d'atteindre A . Comme cette probabilité est très petite, les méthodes de Monte-Carlo classiques ne permettent pas de créer des estimateurs fiables et efficaces. Quelques exemples en dynamique moléculaire sont détaillés dans [BGGR15, CGLP11].

7.1 Simulations d'évènements rares

On ne fera pas une description complète de toutes les méthodes numériques qui existent pour ce genre de problèmes. On renvoie naturellement à une bibliographie riche en citant par exemple [AG07, Buc04, CGMZT14, RT09]. Il existe essentiellement deux familles d'algorithmes : l'échantillonnage d'importance (cf. [HH65, KH51, RR55]) qui perturbe la distribution de la loi de la dynamique (pas toujours accessible dans le cas de dynamiques

en boîtes noires), et les **algorithmes** d'échantillonnage par splitting qui sont basés sur des populations de particules en interaction.

Depuis de nombreuses années, ces **algorithmes de splitting** sont étudiés dans la littérature. On pourra citer notamment par leur nom anglais les méthodes : Subset Simulation [AB01], (Multilevel) Splitting [GHSZ99, Lag06], Nested Sampling [Ski06], RES-TART [VAVA91], Genealogical Particle models, [CDMLL06, DM04, DMG05] et Sequential Monte Carlo, [CDMFG12, DMDJ06].

Dans le cas non-adaptatif, on dispose d'un emboîtement de sous-événements, dont on cherche à estimer les probabilités relatives conditionnelles. La probabilité totale est donc obtenue comme le produit des probabilités conditionnelles successives. Mais la difficulté réside dans le caractère non-biaisé de ces algorithmes. Dans le cas adaptatif, où les événements sont construits durant la simulation, il n'existait aucune démonstration du caractère non-biaisé des estimateurs. Or une version adaptative d'algorithmes de splitting à plusieurs niveaux est nécessaire en pratique. On trouve ce genre d'algorithmes, baptisés AMS, dans [CG07] où la première étude est réalisée dans un cadre idéal de fonctions de répartition continues. L'extension à un cadre général de chaînes de Markov fait l'objet de notre article [BGG⁺16]. Mais on trouvera également plusieurs discussions dans nos articles avec Charles-Édouard Bréhier, Maxime Gazeau, Tony Lelièvre et Mathias Rousset [BGGR15] ainsi que de nombreuses simulations numériques dans [BGG⁺15]. De nombreuses autres études théoriques sont présentes dans [Bré15, BLR15, CG07, GHML11, Sim14, Wal14] avec un théorème central limite dans mon article [BGT16] avec Charles-Édouard Bréhier et Loïc Tudela.

La sensibilité de ces algorithmes face au choix de la fonction d'importance qui pilote la dynamique des particules en interaction est un fait bien connu, même dans l'autre famille d'algorithmes basée sur l'échantillonnage d'importance (cf. [GHSZ98, GW97] et les simulations numériques dans [BGG⁺15]). En général on construit ces fonctions d'importance en résolvant une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, obtenue par une analyse asymptotique (souvent en grandes déviations) (cf. par exemple [BGL06, DW04, VEW12, DD09]). En l'absence de petit paramètre pour réaliser cette analyse asymptotique, aucune méthode générale n'est connue.

7.2 Un algorithme adaptatif de splitting à plusieurs niveaux

On rappelle rapidement le fonctionnement de l'**algorithme** AMS. Supposons donc qu'on dispose d'une fonction d'importance, c'est-à-dire une fonction

$$\xi : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$$

qui peut être utilisée comme une mesure de l'avancée de la trajectoire d'une particule vers B . En dynamique moléculaire, on appelle cette fonction une coordonnée de réaction, et c'est cette nomination qui aura notre préférence. Notamment, la quantité $\xi(X_n)$ est ce qu'on appelle le niveau à l'instant n , et $\Xi(X) = \sup\{\xi(X_{n \wedge \tau_A}) : N \in \mathbb{N}\}$ est le niveau maximal atteint par la chaîne de Markov. L'hypothèse de consistance de la coordonnée de réaction ξ est l'existence d'un niveau $z_{\max} \in \mathbb{R}$ tel que

$$B \subset \{x \in \mathbb{R}^{3N} : \xi(x) \in]z_{\max}, \infty[\}.$$

On construit alors un système de n_{rep} particules (ou répliques) partant de la position x , et qui s'arrête à l'instant τ_A . L'idée est de détruire la particule la moins avancée, et de dupliquer une autre particule, afin de conserver un nombre fixe n_{rep} de particules à chaque itération. La particule la moins avancée est celle qui possède la valeur $\Xi(X)$ la plus faible. La particule qui sera dupliquée est partiellement ré-échantillonnée, en réalité cette nouvelle trajectoire est une copie de la trajectoire dupliquée jusqu'au moment où elle atteint le niveau de la particule qui vient d'être détruite. En ce sens, on obtient un nouvel ensemble de n_{rep} particules où toutes les particules ont atteint un niveau minimal qui correspond au niveau de la dernière particule tuée. Il existe donc trois étapes essentielles :

- (i) une étape de calcul des niveaux de toutes les particules (on parle d'un quantile empirique des niveaux maximums),
- (ii) une étape de splitting, pour déterminer quelles sont les particules détruites, et quelles sont les particules dupliquées, notamment quelles trajectoires seront copiées,
- (iii) une étape de ré-échantillonnage, pour générer une nouvelle trajectoire indépendante, mais dont le passé est fixé par simple copie.

Cet **algorithme** construit un ensemble de particules de taille fixe, dont les niveaux maximums forment une famille croissante. On le stoppe aussitôt que le niveau calculé à l'étape 1 dépasse le niveau z_{max} qui caractérise un voisinage de B . On construit ensuite un estimateur de (26) grâce à la population obtenue.

L'adaptabilité de l'algorithme est entièrement réalisée dans l'étape 1, où les niveaux sont calculés par un quantile empirique, et non pas en fixant une suite déterministe de niveaux comme c'est typiquement le cas dans les méthodes de Monte-Carlo séquentielles (cf. [CDMFG12, DM04]).

Il faut remarquer que tout est écrit dans un contexte de chaîne de Markov, et non pas en temps continu comme dans l'article précurseur [CG07]. La raison se base sur un choix principalement hérité de la pratique numérique. C'est encore une fois l'implémentation dans des cas réels qui suggère le cadre théorique. En effet, si on pense à l'implémentation de l'estimateur en tant qu'**algorithme numérique**, même si le modèle de départ est continu, c'est toujours une approximation numérique discrète en temps qui est réalisée.

Toutefois c'est bien ce cadre discret qui pose des difficultés qui n'étaient pas présentes dans [CG07]. Par exemple, dans l'étape 3 de ré-échantillonnage, on ne se posait pas la question de savoir si le chemin devait être copié du début jusqu'au dernier instant passé sous le niveau, ou du début jusqu'au premier instant où on dépasse le niveau, puisque la trajectoire était continue. Dans le cas discret, cela va impliquer des difficultés subtiles dans l'implémentation de l'algorithme.

J'aimerais insister sur ce point. Si on ne prend pas en compte cette question, on peut montrer que l'implémentation de l'algorithme AMS se retrouve fortement biaisé. On pourra lire [BGG⁺15, Section 5.1] pour des exemples concrets. Ici, c'est donc le théorème et la démonstration qui vont indiquer comment correctement implémenter un **algorithme**. C'est la principale avancée démontrée dans l'article [BGG⁺16] car elle permet d'expliquer pourquoi des variantes des algorithmes AMS, qui semblent pourtant correctes, sont en réalité biaisées par une mauvaise implémentation. De plus, l'article montre l'indépendance

du caractère non biaisé de l'estimateur vis-à-vis du choix des paramètres numériques : le nombre de répliques n_{rep} , le nombre minimal de répliques ré-échantillonnées aux étapes 2-3 et le choix de la coordonnée de réaction.

Dans les travaux précédents (cf. [BLR15, GHML11, Sim14]), le caractère non-biaisé était démontré sous le choix spécifique d'une coordonnée de réaction idéale connue comme la fonction "commitor" donnée par $\xi(x) = \mathbb{P}_x(\tau_B < \tau_A)$ où la probabilité désigne la loi d'une chaîne de Markov partant de la position x (ce qui supposait en quelque sorte de connaître déjà la réponse au problème). La démonstration est inspirée des travaux sur les méthodes de Monte-Carlo séquentielles dans l'esprit de [JDMD06] (on renvoie à [BGG⁺15, Section 3.4] où on détaille davantage cette analogie).

Puisque l'estimateur est non-biaisé, l'erreur restante est une erreur statistique (précisément la variance). On peut lire mon article [BGT16] ou l'article [CG14] pour une analyse de cette erreur statistique. On renvoie également à [GKvO02, GHSZ98, RS15] pour une analyse de l'erreur statistique vis-à-vis du choix de la coordonnée de réaction. On peut notamment mettre en évidence un phénomène de "biais apparent" (bien connu des algorithmes de splitting (cf. [GHSZ98]), lorsque le nombre de réalisations indépendantes n'est pas suffisant pour que les intervalles de confiance se recouvrent.

7.3 Algorithmes AMS généralisés

Je ne détaille pas toute la complexité liée à la définition du cadre généralisé pour les algorithmes AMS généralisés. Je rappelle simplement qu'on est amené à construire un ensemble de particules, dont le nombre peut désormais varier au cours des itérations de l'algorithme. On note ce nombre $I(q) \in \mathbb{N}$ où q est le compteur d'itérations de l'algorithme (une itération de l'algorithme rassemble trois étapes similaires à celles de l'algorithme AMS). On note Q_{iter} le nombre total d'itérations qui furent réalisées par l'algorithme avant qu'il ne soit stoppé par un critère d'arrêt. C'est évidemment une variable aléatoire. La famille de particules $\{X^{(n,q)}\}_{n \in I(q)}$ (ou de répliques) présentes à l'étape $q \in \{0, \dots, Q_{\text{iter}}\}$ est associée à un système de poids $\{G^{(n,q)}\}_{n \in I(q)}$ qui sont des variables aléatoires réelles positives construites en parallèle des particules.

On construit un estimateur de (26) pour une fonction φ bornée mesurable par la formule

$$\hat{\pi}^{(q)}(\varphi) := \sum_{n \in I(q)} G^{(n,q)} \varphi(X^{(n,q)}),$$

étant entendu que la loi π de la chaîne de Markov est approchée par la distribution empirique

$$\hat{\pi}^{(q)} = \sum_{n \in I(q)} G^{(n,q)} \delta_{X^{(n,q)}}, \quad (27)$$

à chaque étape $q \in \{0, \dots, Q_{\text{iter}}\}$. On montre dans [BGG⁺16] que tous les estimateurs qui entrent dans le cadre des estimateurs GAMS sont non biaisés, de telle sorte que pour tout $q \geq 0$

$$\mathbb{E} [\hat{\pi}^{(q)}(\varphi)] = \pi(\varphi).$$

Sous des hypothèses appropriées pour le critère d'arrêt, on montre que cela peut être généralisé pour obtenir le même résultat en cette étape stochastique (à rapprocher évidemment

d'un théorème d'arrêt) c'est-à-dire

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n \in I^{(Q_{\text{iter}})}} G^{(n, Q_{\text{iter}})} \varphi(X^{(n, Q_{\text{iter}})}) \right] = \pi(\varphi),$$

On définit l'hypothèse suivante, qui semble naturelle, mais qui n'est en réalité pas assurée par l'algorithme GAMS, en ce sens qu'elle n'est pas nécessaire bien que physiquement relevante.

Hypothèse 2. On dit qu'un algorithme de splitting qui entre dans le cadre des algorithmes GAMS satisfait la propriété de conservation de la masse si presque sûrement

$$\forall q \geq 0, \sum_{n \in I^{(q)}} G^{(n, q)} = 1. \quad (28)$$

Le résultat principal démontré dans mon article [BGG⁺16] est le suivant :

Théorème 7.1. Soit $\{\{X^{(n, q)}, G^{(n, q)}\}_{n \in I^{(q)}}\}_{0 \leq q \leq Q_{\text{iter}}}$ la suite de systèmes de répliques avec poids générée par un algorithme qui entre dans le cadre GAMS.

Supposons que le nombre d'itérations Q_{iter} est presque sûrement fini (i.e. $\mathbb{P}(Q_{\text{iter}} < +\infty) = 1$) et qu'une des conditions suivantes est vérifiée :

- Q_{iter} est majorée par une constante déterministe,
- la propriété de conservation de la masse (28) est satisfaite (Hypothèse 2).

alors, pour toute fonction $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée sur l'espace des trajectoires \mathcal{P}

$$\mathbb{E} [\hat{\pi}^{(Q_{\text{iter}})}(\varphi)] = \pi(\varphi).$$

En particulier

$$\forall q \in \mathbb{N}, \mathbb{E} [\hat{\pi}^{(q)}(\varphi)] = \pi(\varphi).$$

Remarque 7.2. On peut remarquer que même si la propriété de conservation de la masse n'est pas assurée par l'algorithme, elle est vérifiée en moyenne. En effet pour tout $q \geq 0$, en prenant $Q_{\text{iter}} = q$ et $\phi = 1$ dans le théorème 7.1, on a bien

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n \in I^{(q)}} G^{(n, q)} \right] = 1.$$

La stratégie de démonstration repose sur l'introduction de variables aléatoires

$$M^{(q)}(\varphi) = \mathbb{E} (\hat{\pi}^{(q)}(\varphi) | \mathcal{F}^{(q)})$$

pour une fonction test $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée, et de montrer que le processus $(M^{(q)}(\varphi))_{q \in \mathbb{N}}$ indexé par q est une martingale par rapport à une filtration construite sur la population. En voyant Q_{iter} comme un temps d'arrêt pour cette filtration, le théorème d'arrêt de Doob pour les martingales s'applique.

7.4 Illustrations numériques

Le but de cette section est d'illustrer le comportement de l'algorithme GAMS, ou plutôt de son implémentation sous la forme d'un algorithme AMS. Plusieurs discussions sont présentes dans [BGG⁺15], où on discute du caractère non-biaisé quel que soit le choix de la coordonnée de réaction (avec notamment une discussion sur le phénomène de biais apparent présenté dans [GHSZ98]), du choix du nombre de répliques n_{rep} , du choix du nombre minimal de particules détruites à chaque étape et du comportement de l'erreur statistique.

Afin de montrer la qualité de l'**algorithme** AMS, je vais montrer comment il peut s'appliquer à la recherche d'estimations de quantités issues des équations aux dérivées partielles stochastiques. Par exemple, les deux équations décrites dans ce mémoire

$$\begin{aligned} \text{Allen-Cahn} \quad & dX = AXdt + \Psi(X)dt + dW, & X(0) = x, \\ \text{Cahn-Hilliard} \quad & dX = -\frac{1}{2}A(AXdt + f(X))dt + BdW, & X(0) = x, \end{aligned}$$

pour une condition initiale $x \in E$.

Ces équations entrent parfaitement dans le cadre des dynamiques méta-stables précédemment décrites. Par exemple, pour une donnée initiale mélangée, il est quasiment impossible de prévoir l'état asymptotique même dans le cas déterministe (cf. figure 5)

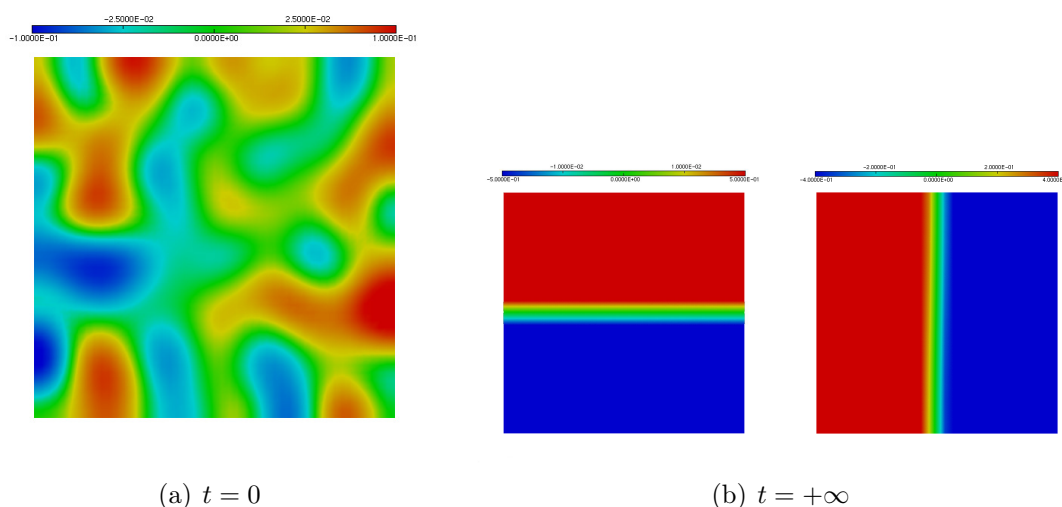


FIGURE 5 : Donnée initiale quelconque rejoignant deux états stables possibles en temps long pour une dynamique de Cahn-Hilliard.

Lorsqu'on ajoute un terme de forçage stochastique, on peut alors observer des dynamiques méta-stables, entre de multiples zones qui sont des puits du potentiel d'énergie infini dimensionnel.

Sur la figure 6, on peut avoir que la donnée initiale rejoint rapidement le voisinage d'un état stable (du point de vue déterministe) et reste bloquée dans cette zone méta-stable où l'on remarque un plateau dans l'évolution de son énergie. Puis la solution parvient à s'échapper du piège d'énergie, et rejoint une autre zone méta-stable où elle passera un

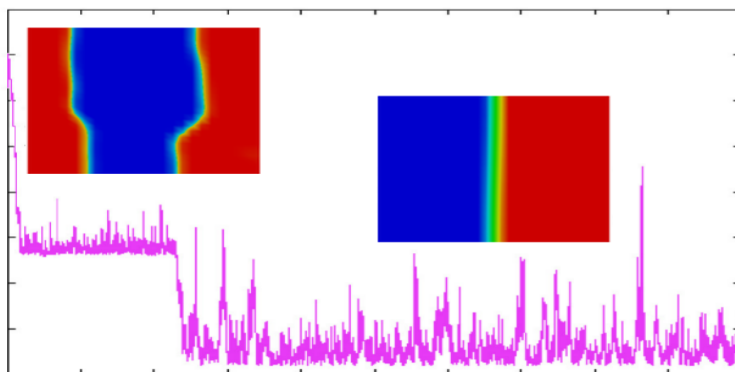


FIGURE 6 : Évolution de l'énergie d'une solution lors d'un saut d'un état stable vers un autre état stable de plus basse énergie.

temps extrêmement grand, malgré des sursauts d'énergies qui auraient pu lui permettre de rejoindre d'autres zones méta-stables.

Bien que très succinct, c'est pourtant cet instant qu'on recherche. En effet, on veut comprendre le comportement de la solution durant un changement d'état méta-stable. Sur la figure 6, il n'y a qu'un seul saut, ce qui est trop peu pour des estimées statistiquement représentatives. Pour cela on peut tenter d'augmenter la puissance du bruit, en le multipliant par un facteur de volatilité, ce qui correspond à augmenter la température et donc l'agitation thermique modélisée. Sur la figure 7, on peut voir l'évolution en temps long de l'énergie, et on remarque bien les différents changements d'états méta-stables par la présence de plateaux dans l'énergie, certains états méta-stables possèdent une énergie minimale, d'autres une énergie plus importante.

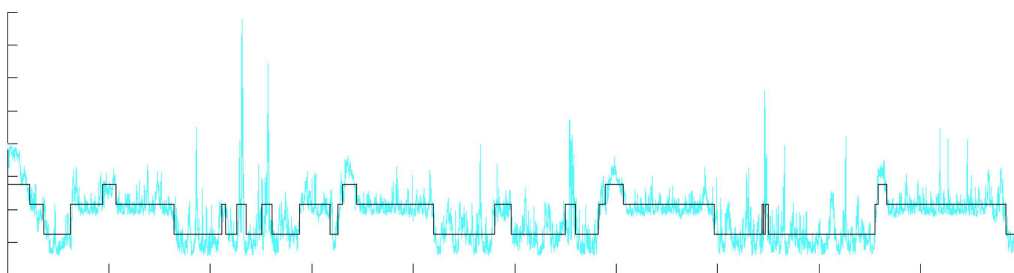


FIGURE 7 : Oscillation entre plusieurs états méta-stable.

On peut introduire un modèle de dynamique de Langevin amortie afin d'approcher la dynamique de l'équation d'Allen-Cahn stochastique. C'est ce modèle simple qui a justifié le choix de l'équation d'Allen-Cahn comme premier modèle d'étude. Précisément, on construit une chaîne de N atomes plongés dans un puits de potentiel, et relié entre eux par une force de rappel quadratique aux plus proches voisins. Le bruit est représenté par un processus de Wiener en dimension N noté $W^N = (W_1^N, \dots, W_N^N)$ dont la matrice de covariance vérifie pour tout vecteur $u, v \in \mathbb{R}^N$

$$\mathbb{E}[\langle W^N(t), u \rangle \langle W^N(s), v \rangle] = \min(t, s) \langle u, v \rangle,$$

pour tous les instants $s, t \in \mathbb{R}^+$.

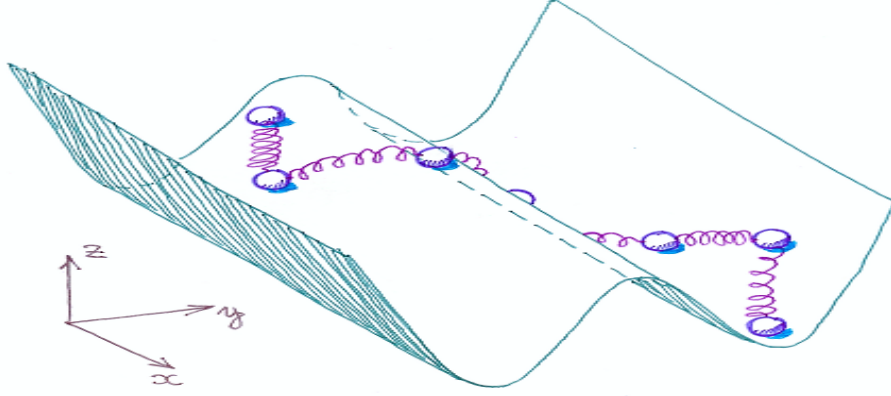


FIGURE 8 : Modèle de dynamique de Langevin amortie pour Allen-Cahn.

La position des N atomes à l'instant t est notée $X_i^N(t)$ pour $1 \leq i \leq N$. Le système est la solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_i^N(t) = \gamma N(X_{i-1}^N(t) + X_{i+1}^N(t) - 2X_i^N(t))dt + \frac{1}{N}\Psi(X_i^N(t))dt + \sqrt{2\epsilon}dW_i^N(t),$$

avec des conditions de Neumann homogènes traduites par les équations $X_{N+1}^N := X_N^N$, $X_0^N := X_1^N$ et pour une donnée initiale $(X_i(0))_{1 \leq i \leq N} = (x_i^N)_{1 \leq i \leq N}$.

Le paramètre $\epsilon > 0$ représente le niveau de bruit, relié à la température. Et on se place toujours dans le cadre d'un potentiel V en double puits dont $-\Psi$ est la dérivée. Les deux états stationnaires stables dans le cas déterministe ($\epsilon = 0$) sont notés

$$x_\infty^\pm(\theta) = \pm 1, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathcal{D}.$$

Il existe également un état stationnaire instable critique noté x_∞^0 tel que $x_\infty^0(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathcal{D}$.

Ce système, qui peut être vu comme un schéma en différences finies pour l'équation d'Allen-Cahn stochastique, est en réalité résolu par le schéma de splitting décrit dans la section 6.4. L'énergie discrète \mathcal{E}_γ^N du système est donné par la formule

$$\mathcal{E}_\gamma^N(X^N) = \frac{\gamma}{2N} \sum_{i=0}^N N^2(X^{i+1,N} - X^{i,N})^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(X^{i,N}).$$

Cela permet d'identifier le système d'équations différentielles stochastiques comme une dynamique de Langevin amortie pour l'énergie \mathcal{E}_γ^N . En effet, on peut écrire

$$dX^N(t) = -\nabla \mathcal{E}_\gamma^N(X^N(t))dt + \sqrt{2\epsilon}dW^N(t).$$

Le paramètre $\gamma > 0$ détermine la rigidité entre les atomes. Il est de première importance dans l'étude de la méta-stabilité. En effet, la nature des points stationnaires

se trouve modifiée pour différentes valeurs de γ et d'autres points stationnaires peuvent apparaître lors de bifurcations.

Afin d'illustrer ce phénomène, on représente des trajectoires réactives dans le cas $N = 2$ pour différentes valeurs de γ . Ces trajectoires réactives obtenues par l'**algorithme** AMS démarrent d'une donnée initiale x proche de l'état $x_{\infty}^{-} = (-1, 1)$, et vont rejoindre un voisinage B du point $x_{\infty}^{+} = (1, 1)$ sans retomber dans le voisinage A du point x_{∞}^{-} . Dans la figure 9 on peut remarquer que le système composé de deux particules n'emprunte pas les mêmes chemins, et que la structure de ces trajectoires dépend fortement de la valeur γ . Lorsque la rigidité est forte, les deux atomes sont fortement liés, et la molécule composée de ces deux atomes se déplace le long de la diagonale (cf. le cadre en haut à gauche de la figure 9). Elles passent proches du point selle x_{∞}^0 . Quand γ devient plus petit, de nouveaux points critiques de l'énergie peuvent apparaître. La molécule va donc emprunter un chemin différent en tentant de passer par les nouveaux cols qui apparaissent dans le paysage. Quand γ devient vraiment petit, il peut apparaître des vallées dans le paysage, et la molécule va se retrouver piégée dans ces nouvelles zones. En effet, la coordonnée de réaction

$$\xi : x \mapsto \sum_{i=1}^N x_i$$

est construite pour favoriser le passage de x_{∞}^{-} vers x_{∞}^{+} le long de la diagonale. Elle devient donc peu efficace pour aider la molécule à sortir du nouveau puits car la direction de sortie semble orientée selon les axes cartésiens. Cela souligne l'importance du choix de la coordonnée de réaction si le paysage devient complexe, surtout que comme l'indique le théorème cela ne biaise pas les estimées.

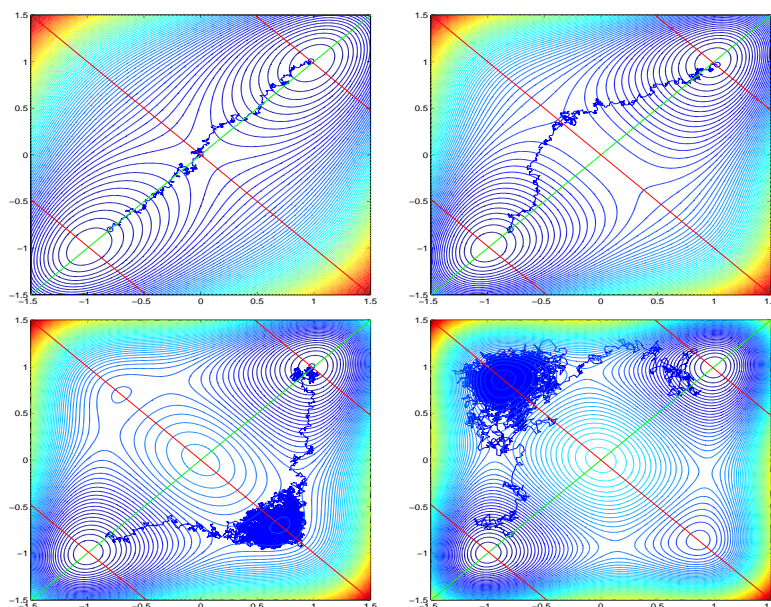


FIGURE 9 : Exemple d'une trajectoire réactive obtenue par l'algorithme AMS, pour différentes valeurs de la rigidité γ . Le sens de lecture correspond à des valeurs de rigidité décroissantes.

Le cas est particulièrement complexe en dimension $N = 2$. Dans le cas $N \rightarrow +\infty$, il est clair que la compréhension de la surface d'énergie sur laquelle se déplace la molécule est difficilement représentable. On peut toutefois tenter de passer à la limite dans l'énergie. En effet, pour $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{D} = [0, 1]$, on peut construire un maillage de pas d'espace $h = 1/(N + 1)$, et si on note $X^{i,N} = X(ih)$ alors

$$\mathcal{E}_\gamma^N(X^{1,N}, \dots, X^{N,N}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_\gamma^\infty(X) = \frac{\gamma}{2} \int_0^1 |X'(\theta)|^2 d\theta + \int_0^1 V(X(\theta)) d\theta$$

en tant que sommes de Riemann. On peut étendre cette convergence à l'espace $H_0^1(0, 1)$. En effet, par injection de Sobolev, les fonctions de $H_0^1(0, 1)$ sont continues et on peut donner un sens au terme non-linéaire.

De plus, on peut construire une mesure invariante pour la dynamique de Langevin amortie avec l'énergie \mathcal{E}_γ^N qui s'écrit

$$\nu_\gamma^{N,\epsilon}(dx) = \frac{1}{Z_\gamma^{N,\epsilon}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_\gamma^N(x)}{\epsilon}\right) dx.$$

En introduisant une mesure de référence

$$\mu_\gamma^{N,\epsilon}(dx) = \exp\left(-\frac{\gamma \mathcal{D}^N(x)}{\epsilon}\right) dx,$$

par la décomposition de l'énergie selon deux termes $\mathcal{E}_\gamma^N = \gamma \mathcal{D}^N + \mathcal{V}^N$, un terme d'énergie cinétique et un terme d'énergie potentielle, on peut poursuivre cette stratégie de démonstration pour trouver l'unique mesure invariante du système limite quand $N \rightarrow +\infty$ sous la forme

$$\nu_\gamma^{\infty,\epsilon}(dx) = \frac{1}{Z_\gamma^{\infty,\epsilon}} \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon} \int_0^1 V(x(\theta)) d\theta\right\} \mu_\gamma^{\infty,\epsilon}(dx),$$

où $Z_\gamma^{\infty,\epsilon}$ est une constante de normalisation. La forme est complètement identique à l'équation (8) de la section 2.3, c'est-à-dire la mesure invariante qui fut construite dans le cas Cahn-Hilliard, mais dont la forme est identique dans le cas Allen-Cahn.

Je ne détaille pas l'heuristique de la construction de ces mesures invariantes qui peut se retrouver dans [BGGR15]. Certains résultats peuvent être rendus rigoureux, dans le cas des conditions de Dirichlet homogènes (cf. [WOW13, Web10b]). On peut montrer que la mesure de référence est une loi de pont brownien qui fait echo avec les résultats de la section 2.3 de ce mémoire.

On tente maintenant d'étendre l'étude au cas de la dimension infinie. On sait grâce au théorème 6.14 de la section 6.6 de ce mémoire que notre schéma de splitting construisant une chaîne de Markov en temps discret va correctement approcher l'évolution temporelle de l'équation d'Allen-Cahn. On sait également que les mesures invariantes décrites sur une discrétisation de l'espace convergent vers les mesures invariantes du système continu. On possède donc tous les ingrédients nécessaires pour réaliser des simulations numériques qui vont correctement approcher la dynamique continue.

On présente quelques exemples de trajectoires réactives obtenues grâce à l'**algorithme** AMS dans le cas de l'équation d'Allen-Cahn représentée par un grand système d'atomes

discrétisant l'espace. Précisément le pas de temps $\Delta t = 0.01$ et le pas d'espace $\Delta\theta = 0.02$. On utilise $n_{rep} = 100$ répliques et $\epsilon = 0.05$. La condition initiale est $x : \theta \mapsto -0.8$ pour tout $\theta \in \mathcal{D}$.

La figure 10 représente deux trajectoires réactives obtenues dans le cas d'une rigidité forte avec $\gamma = 1$. On peut voir un comportement similaire à celui observé en dimension $N = 2$: tous les atomes se déplacent à l'unisson pour passer de la configuration bleue (donnée initiale x proche de l'état x_∞^-) à la configuration rouge (proche de l'état x_∞^+).

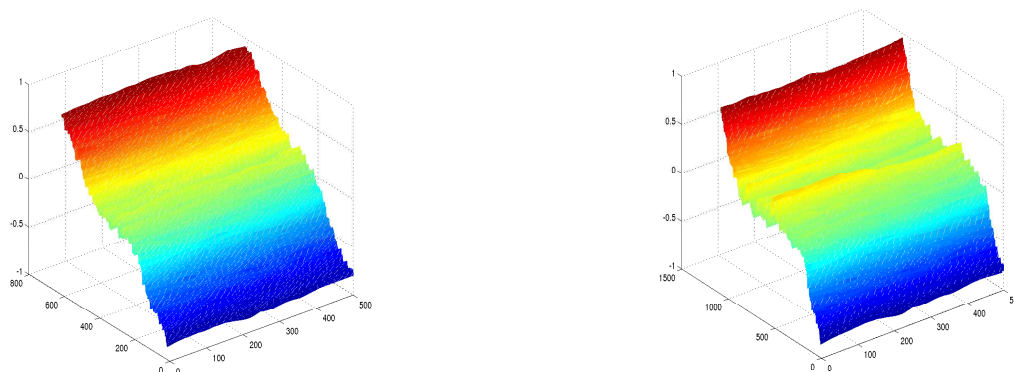


FIGURE 10 : Trajectoires réactives pour la dynamique d'Allen-Cahn pour $\gamma = 1$.

La figure 11 représente deux trajectoires réactives obtenues dans le cas d'une rigidité plus faible avec $\gamma = 0.1$. On peut voir qu'une moitié de la solution rejoint la zone rouge, suivie plus tard de l'autre moitié de la solution. Cette trajectoire était attendue, elle est à rapprocher du cas $N = 2$ avec l'apparition d'un nouvel état stable. Ici en l'occurrence, une bifurcation dans la dynamique a eu lieu, et il existe un nouvel état stationnaire stable qui est de forme sinusoidale (proche d'un cosinus exactement ou d'une tangente hyperbolique dans le cas d'un domaine \mathcal{D} étendu).

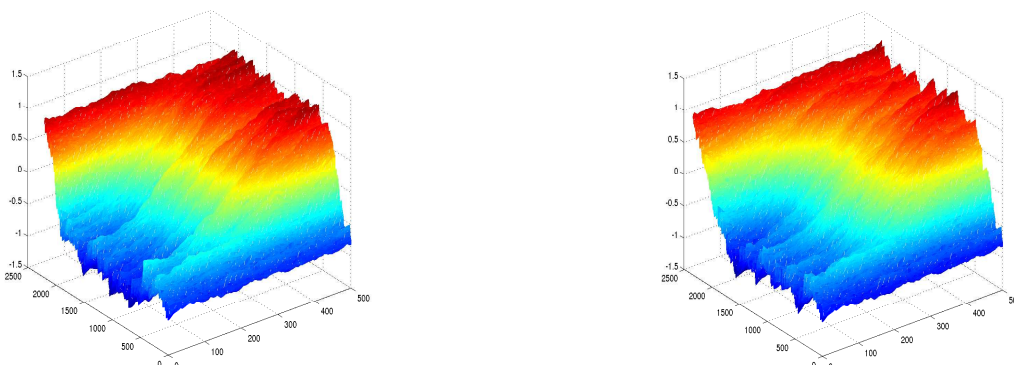


FIGURE 11 : Trajectoires réactives pour la dynamique d'Allen-Cahn pour $\gamma = 0.1$.

Le calcul d'une seule trajectoire prend environ 0.4 seconde. Si on réalise 10^6 réalisations indépendantes, l'estimateur de Monte-Carlo de la probabilité de transition fournit une

valeur de 0.00507 avec un écart-type de 7.12×10^{-5} . L'algorithme AMS nous permet également d'estimer la probabilité de ces transitions. On peut coupler cet algorithme avec une procédure Monte-Carlo en répétant l'algorithme AMS de manière indépendante. Par exemple, on calcule 100 fois l'estimateur AMS. Alors on peut construire des intervalles de confiance empiriques sur cet échantillon de type Monte-Carlo constitué de 100 répétitions. Les intervalles de confiance empiriques sont obtenus en divisant par $\sqrt{100}$ les écart-types des simulations qui sont donnés dans la table récapitulative 7.4.

n_{rep}	Probabilité AMS/MC	Écart-type AMS/MC
50	0.00516	0.00163
100	0.00514	0.00128
200	0.00502	0.000774
1000	0.00501	0.000350

TABLE 1 : Probabilités et écart-types obtenus par l'algorithme AMS, couplés à une procédure de Monte-Carlo constituée de 100 répétitions.

On remarque que la précision est améliorée quand le nombre de répliques n_{rep} croît. On peut alors essayer de comparer les résultats obtenus pour $(n_{\text{rep}} = 100, N_{MC} = 1000)$ et $(n_{\text{rep}} = 1000, N_{MC} = 100)$.

n_{rep}	N_{MC}	Probabilité estimée	Écart-type	Intervalle de confiance	Temps de calcul d'une réalisation MC
100	1000	0.00502	0.00166	5.25×10^{-5}	67 s
1000	100	0.00501	0.000350	3.5×10^{-5}	676 s

TABLE 2 : Écart-type et temps de calcul pour deux choix de n_{rep} .

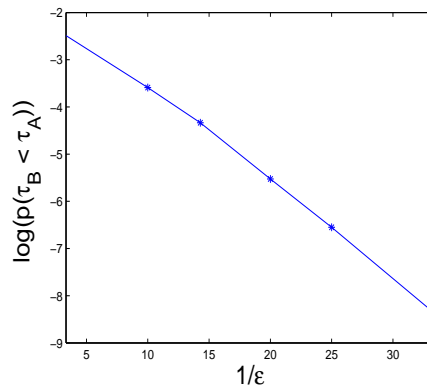
Dans les deux cas, on obtient la même précision avec approximativement les mêmes temps de calcul. Deux arguments vont pourtant dans le sens du choix n_{rep} petit. Premièrement l'estimateur est non-biaisé pour toute valeur de n_{rep} , donc essayer de multiplier le nombre de répliques ne sert théoriquement à rien. Deuxièmement il est très simple d'optimiser le calcul en parallélisant la procédure Monte-Carlo, contrairement à la parallélisation de l'algorithme AMS qui semble une tâche difficile.

On peut également tenter de vérifier des résultats obtenus dans [CM97, BG13, Bar12, Bov09, FBG16] concernant l'asymptotique quand le paramètre $\epsilon \rightarrow 0$. Grossièrement, on veut exhiber une loi d'Arrhenius. On estime donc la probabilité de transition dans le cas $\gamma = 2$, toujours avec $n_{\text{rep}} = 100$ et 100 réalisations Monte-Carlo, avec la paramètre ϵ qui tend vers 0. Les résultats sont indiqués dans la table 7.4.

Pour vérifier le comportement en loi d'Arrhenius, on doit vérifier que $\log(\mathbb{P}(\{\tau_B < \tau_A\}))$ se comporte comme $1/\epsilon$. On illustre bien ce comportement sur la figure 12.

Il est possible d'utiliser l'algorithme AMS pour calculer des temps de transition, en découpant les trajectoires qui vont de A vers B selon la procédure suivante. Notons $\Sigma_{z_{\min}}$ une iso-surface de la coordonnée de réaction pour le niveau z_{\min} qui (par analogie avec z_{\max}) décrit un voisinage de A .

ϵ	Probabilité estimée	Écart-type
0.30	0.0831	$1.33 \cdot 10^{-2}$
0.10	0.0276	$5.11 \cdot 10^{-3}$
0.07	0.0131	$2.81 \cdot 10^{-3}$
0.05	0.00398	$9.87 \cdot 10^{-4}$
0.04	0.00143	$4.06 \cdot 10^{-4}$
0.03	0.000234	$6.17 \cdot 10^{-5}$

TABLE 3 : Dépendance de la probabilité de transition en fonction du paramètre ϵ .FIGURE 12 : Tracé de $\log(\mathbb{P}(\{\tau_B < \tau_A\}))$ en fonction de $1/\epsilon$.

On considère le début de la trajectoire, jusqu'à l'atteinte de la zone $\Sigma_{z_{\min}}$, puis son retour en A , puis de nouveau l'atteinte de la zone $\Sigma_{z_{\min}}$, et le retour en A , jusqu'à la dernière répétition de ce schéma qui a lieu quand la réplique partant de A passe par $\Sigma_{z_{\min}}$ et rejoint B . On appelle T_1 le temps typique pour monter de A vers $\Sigma_{z_{\min}}$, T_2 le temps pour retourner en A , et T_3 le temps pour aller du niveau z_{\min} vers B .

Alors le temps de transition moyen peut s'écrire

$$\mathbb{E}(T) = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \mathbb{E}(T_1 + T_2) + \mathbb{E}(T_1 + T_3)$$

où p est la probabilité, une fois que $\Sigma_{z_{\min}}$ a été atteinte, d'aller en B plutôt que A . Cette probabilité est estimée par l'algorithme AMS. $\mathbb{E}(T_1 + T_2)$ est le temps moyen d'une trajectoire depuis A vers $\Sigma_{z_{\min}}$ puis son retour en A . Il peut être facilement estimé par une procédure directe, car la trajectoire réalise très souvent ce schéma. $\mathbb{E}(T_1 + T_3)$ est le temps moyen d'une trajectoire partant de A vers $\Sigma_{z_{\min}}$ puis vers B . Il peut être estimé par l'algorithme AMS.

On trouvera plus d'explications sur cette stratégie dans les travaux de Romain Poncet et Anne De Bouard dans le contexte des équations aux dérivées partielles stochastiques de type Schrödinger.

8 Projets et perspectives

Dans cette seconde partie de mon mémoire, j'ai présenté plusieurs résultats théoriques sur des **algorithmes** stochastiques et leurs applications dans le cadre des équations aux dérivées partielles stochastiques. La combinaison de ces résultats est un premier pas vers des estimations sur les dynamiques asymptotiques des solutions d'équations aux dérivées partielles stochastiques. En effet, les régimes transitoires ne sont pas particulièrement pertinents et on cherche davantage à estimer des quantités dépendantes des dynamiques sous les lois invariantes.

Régimes asymptotiques et mesures invariantes

On peut envisager une généralisation possible des théorèmes de convergence pour Allen-Cahn sous la forme adaptée à cette recherche asymptotique. En effet, les constantes $C_\alpha(T, \Delta t_0)$ et $C_{\beta,\gamma}(T, \Delta t_0)$ des théorèmes 6.13 et 6.14 sont obtenues comme des bornes uniformes par rapport à la variable t sous l'estimation suivante

$$\sup_{t \in (0, T]} C_\alpha(t, T, \Delta t_0) \leq C_\alpha(T, \Delta t_0) \text{ and } \sup_{t \in (0, T]} C_{\beta,\gamma}(t, T, \Delta t_0) \leq C_{\beta,\gamma}(T, \Delta t_0),$$

car on reste en horizon finie T . Mais pour étudier le régime asymptotique, on a besoin d'un contrôle de λ_1 la première valeur propre de l'opérateur linéaire. Par exemple si on suppose que la constante $c(\Delta t_0) = \lambda_1 - e^{\Delta t_0} > 0$, alors

$$C_\alpha(t, T, \Delta t_0) \leq e^{-c(\Delta t_0)t} C_\alpha(1, \Delta t_0) e^{c(\Delta t_0)}.$$

et pour toute constante $\tilde{c}(\Delta t_0) \in (0, c(\Delta t_0))$

$$C_{\beta,\gamma}(t, T, \Delta t_0) \leq e^{-\tilde{c}(\Delta t_0)t} C_{\beta,\gamma}(1, \Delta t_0) e^{\tilde{c}(\Delta t_0)}.$$

On obtient donc un contrôle asymptotique contractant. En couplant ces schémas numériques à un estimateur GAMS, on peut obtenir des estimateurs, certes biaisés par l'approximation numérique, mais dont le biais est exponentiellement petit en temps long.

Ordre de convergence supérieur

Une autre direction de recherche, suggérée encore une fois par les simulations numériques, est l'étude la méthode (23). En effet, il semble clair sur les multiples simulations numériques réalisées que l'ordre de convergence est plus important qu'attendu. Aucun résultat théorique n'aborde cette question. La structure de l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs de splitting joue certainement un rôle clé. Il est d'ailleurs surprenant que la méthode (23) sur-performe la méthode (24) alors que cette dernière possède une symétrie non présente dans (23). D'autres méthodes ont également été étudiées d'un point de vue numérique. Certains splitting sont algébriquement équivalents (ou dans une classe de similarité), et ils n'ont donc pas été présentés. L'étude de splitting d'ordres plus élevés est également une piste de recherche envisagée, mais il semble plutôt difficile d'obtenir des ordres de convergence supérieurs en présence de non-linéarités.

Cadre général de méthodes de splitting

La méthode de splitting présentée pour l'équation d'Allen-Cahn peut certainement se généraliser à un grand nombre de problèmes qui possèdent une structure similaire, car tous les ingrédients semblent présents pour construire un cadre de démonstration général. Cette direction de recherche pourrait s'avérer extrêmement fructueuse pour un étudiant en thèse car les démonstrations de convergence pour des équations aux dérivées partielles stochastiques forment un sujet actuellement très actif, et de nombreuses équations restent encore inexplorées.

Étude approfondie des ordres numériques en dimension infinie

D'un point de vue numérique, l'élaboration de techniques d'estimations et de schémas numériques dont on possède des estimations de vitesse de convergence est un sujet brûlant en quantification des incertitudes. Avec les ordres des schémas temporels et les vitesses de convergence des estimateurs GAMS, on est capable de comprendre comment choisir les paramètres numériques de simulation. On peut voir dans les figures 3 et 4 que les courbes de convergence sont en réalité des droites parfaites. On est pourtant dans un cadre de dimension infinie ($1/\Delta x = 4000!!!$) et seulement 10^5 réalisations Monte-Carlo ont été réalisées. Bien sûr les variances empiriques ne sont pas indiquées sur les figures, mais elles sont d'un ordre plus faible que les erreurs. C'est la méthode de Monte-Carlo à plusieurs niveaux qui a permis de contrôler ces erreurs statistiques. Concernant les simulations par l'**algorithme** AMS, on remarque également un comportement très régulier des simulations stochastiques malgré la dimension spatiale de l'ordre de 20-50. J'envisage donc de porter ces algorithmes sur des architectures parallèles afin de repousser les restrictions de dimension, et d'étudier plus en profondeur l'impact de la présence de bruit blanc espace-temps. Car on pourrait arguer que ces objets ne se révèlent qu'en dimension infinie, et qu'on ne fait qu'entrevoir leur impact par la projection sur des dimensions finies. C'est effectivement le cas ! En réalité, si le bruit dans les équations n'est pas assez représentatif d'un bruit blanc espace-temps, c'est-à-dire si on se place en dimension petite, et que le schéma numérique n'est alors plus qu'un schéma classique (Euler-Maruyama) pour un système d'équations différentielles stochastiques couplées, alors les ordres de convergence s'améliorent. Ce n'est pas un effet désiré, mais plutôt un artefact numériques car on perd tout l'intérêt du modèle en dimension infinie. D'un point de vue pratique, cette destruction d'ordre se réalise pour des Δt trop proches du pas de temps $\Delta t^* = \Delta t_0/2^K$ utilisé pour calculer la solution de référence.

Extension des résultats sur l'algorithme GAMS

J'envisage également d'étudier des améliorations de l'**algorithme** GAMS. Plusieurs avancées récentes concernant des théorèmes asymptotiques de convergence viennent d'être réalisées par Frédéric Cérou, Bernard Delyon, Arnaud Guyader et Mathias Rousset qui étudient la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs AMS dans un cadre général par analogie avec des systèmes de particules Fleming-Viot. Il existe également des directions intéressantes pour l'estimation des temps de transition, étudiées par Charles-Édouard Bréhier, Tony Lelièvre, et initiées numériquement par Romain Poncet sur des équations de Schrödinger stochastiques. La propriété de non-biais permet de construire des version parallèles de l'algorithme dont on attend que la variance soit de la forme

$\frac{1}{n_{\text{rep}} \times N}$, ce qui est effectivement le cas dans un cadre idéalisé asymptotiquement en n_{rep} et N (cf. [BLR15]). Une autre direction qui permettrait d'améliorer les estimations de variance, ou la convergence de manière générale pour les algorithmes GAMS, serait de les coupler à des méthodes de bootstrap, méthode classique en statistique pour augmenter artificiellement les tailles des échantillons. Surtout que les simulations numériques semblent indiquer que l'estimateur possède des queues lourdes. C'est une direction très prospective pour le moment.

Variantes AMS

À ce jour, seul l'algorithme AMS entre dans le cadre de l'algorithme GAMS. Mais il est clair qu'on peut proposer plusieurs variantes (cf. [BGG⁺15, Section 3.5] qui traite de quelques améliorations). Notamment, on peut montrer que l'extinction de la population est possible au cours des itérations, mais on souhaite l'éviter dans les cas pratique. On souhaite également éviter l'étape de tri qui peut s'avérer être un goulot d'étranglement. On aimerait également implémenter d'autres étapes de sélection. Pour conclure, on peut remarquer que le cadre GAMS s'applique pour le calcul d'échantillonnage de discrétisations de processus de diffusion, de processus à sauts, de processus de branchement, etc. On pourrait également imaginer que la coordonnée de réaction soit construite de manière adaptative, afin d'obtenir un algorithme de reconstruction de la fonction "com-mitor". Toutes ces directions sont autant de pistes de recherche possibles pour obtenir des résultats plus forts dans des cadres spécifiques.

Turbulence

J'ai initié au sein de la Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec, plusieurs collaborations sur le thème de la turbulence, notamment avec Alexandre Richard, David Mercier, Aymeric Vié et Marc Massot. Toujours avec cette idée d'utiliser l'**algorithme numérique** comme référence, nous avons des simulations numériques fournies par Rémi Zamanski (un expert en simulations numériques de la turbulence) qui exhibent des distributions de queues lourdes, des phénomènes d'intermittence et de "skewness". La simulation numérique couple des effets de turbulence faible avec des agitateurs stochastiques. La combinaison de ces deux effets semble responsable d'un comportement global particulièrement difficile à obtenir lorsqu'on ne considère ces effets que séparément. L'étude de l'ergodicité du système semble relativement aisée, ce qui explique les effets mélangeants, et notamment quelques caractéristiques de la turbulence faible. Mais il est surprenant que des effets d'intermittence se manifestent en dimension 3 pour des schémas numériques aussi simples, quand on sait que la construction d'un processus en dimension 1, qui montre de l'intermittence nécessite des techniques de renormalisation de processus via des cascades multiplicatives et des distributions multi-fractales.

Troisième partie

Algorithmes Déterministes

Dans cette partie, je détaille des résultats que j’ai obtenus toujours dans un cadre de modèles aléatoires, mais pour lesquels des **algorithmes déterministes** ont été utilisés. Cette recherche commence avec mes premières simulations numériques grâce à la bibliothèque MELINA (cf. [Mar08]). Je suis à l’époque aidé par Grégory Vial, Daniel Martin et Virginie Bonnaillie-Noël alors que je suis encore en thèse avec Arnaud Debussche. Je développe une méthode basée sur des éléments finis pour la simulation des équations de Cahn-Hilliard stochastiques. Pour cela je participe à l’enrichissement de la bibliothèque en FORTRAN, mais également plus tard à l’écriture de sa version C++ qui donnera naissance à la bibliothèque XLIFE++ (cf. [XLI18]) développée conjointement par des membres de l’IRMAR à Rennes et de l’équipe POEMS de l’ENSTA à Palaiseau.

Alors que je suis les cours dispensés au master de probabilités et finance El Karoui-Pagès-Yor, je fais la rencontre d’Aymeric Kalife au “Group Risk Management” d’AXA qui m’oriente vers des applications des mathématiques financières, et notamment vers les “variable annuities”. C’est le début de ma collaboration avec l’équipe-projet MathFi dirigée par Agnès Sulem chez Inria. Je travaille notamment avec Antonino Zanette professeur à l’université d’Udine sur de multiples problèmes algorithmiques ayant des applications en finance et en assurance. Puis un peu plus tard je rencontre Xiao Wei de l’Université Centrale d’Économie et de Finance de Pékin (CUFE) avec laquelle je travaille sur des méthodes Fourier-Cosine. L’ensemble de ces **algorithmes numériques** sont intégrés dans le logiciel de calcul PREMIA (cf. [Inr16]). Mon avancée la plus signifiante dans ce domaine est certainement l’étude des méthodes ADI (“Alternating Direction Implicit”). L’étude de la régularité des solutions vis-à-vis des conditions de bord fournit une méthode plus efficace pour traiter des équations aux dérivées partielles en dimension 1+2, puis 1+3. On peut insister sur ce point, en affirmant que les mathématiques permettent d’améliorer les méthodes numériques, mais qu’également les méthodes numériques nous suggèrent des problèmes mathématiques à résoudre.

Quelques temps après, je fais la connaissance de Robert Eymard, Michel Roussignol et Christiane Coccozza-Thivent, professeurs au laboratoire de mathématiques appliquées (LAMA) de l’université Paris-Est Marne-la-Vallée au sein duquel je prends mon premier poste de chargé de recherche CNRS. Ils sont intéressés à travailler sur un champ mêlant méthodes numériques et processus stochastiques, mais les vocabulaires de ces deux disciplines sont parfois difficilement conciliables, et ils souhaitent que je leur apporte mon aide. Ce fut un processus long et difficile, mais nous développons une méthode complètement nouvelle basée sur des volumes finis pour montrer l’existence de processus de Markov déterministes par morceaux qui possèdent une singularité de type frontière. Cela me donnera même l’occasion de travailler avec Christiane Coccozza-Thivent sur son projet de livre sur les PDMP qui est actuellement en cours de publication. Robert Eymard me propose également de travailler avec Pierre-André Zitt sur des méthodes d’analyse inverse pour étudier la limite en grande population de processus biologiques aléatoires de sélection de type Wright-Fisher, ce qui me donnera l’occasion de commencer à travailler sur des données biologiques, diversifiant encore une fois les possibilités d’applications de toutes ces

méthodes numériques.

C'est en réalité le message que j'aimerais faire passer dans cette partie : que les méthodes numériques ont des applications dans des champs très divers, parfois même pour montrer l'existence de solutions à des problèmes issus d'autres disciplines ou d'autres champs disciplinaires mathématiques comme les probabilités ou les statistiques. Je cite dans l'ordre chronologique les publications qui se rapportent à cette partie orientée vers les **algorithmes déterministes** pour des problèmes stochastiques.

[L1] Bibliothèque FORTRAN de calcul éléments finis MELINA, 2006-2010.

[H1] Ludovic Goudenège, Daniel Martin et Grégory Vial. High order finite element calculations for the Cahn-Hilliard equation. *J. Sci. Comput.*, 52(2) :294–321, 2012.

[H2] Ludovic Goudenège, Aymeric Kalife et Saad Mouti. Managing gap risks in iCPPI for life insurance companies : a risk/return/cost analysis. *Insurance Markets and Companies : Analyses and Actuarial Computations*, 5(2), 2014.

[H3] Ludovic Goudenège. Numerical methods for piecewise deterministic Markov processes with boundary. *ESAIM*, 45 :338–348, Septembre 2014.

[B4] Christiane Coccozza-Thivent et Ludovic Goudenège. *Markov renewal processes Piecewise deterministic Markov processes*. Version française disponible sur internet. 2014. Version anglaise en préparation pour publication. 2018.

[H5] Ludovic Goudenège et Pierre-André Zitt. A Wright-Fisher model with indirect selection. *Journal of Mathematical Biology*, 71(6) :1411–1450, Décembre 2015.

[H6] Ludovic Goudenège, Andrea Molent et Antonino Zanette. Pricing and Hedging GLWB in the Heston and in the Black-Scholes with Stochastic Interest Rate Models. *Insurance : Mathematics and Economics*, 70 :38–57, Septembre 2016.

[L2] Bibliothèque C++ de calcul éléments finis XLIFE++, 2012-2016.

[L3] Logiciel PREMIA de l'équipe recherche INRIA MathRisk, 2010-2016.

[H8] Ludovic Goudenège, Andrea Molent et Antonino Zanette. Variable Annuities : New Solution to Long-Term Investment Problem. *Journal Global Policy and Governance*, 5(2) :35-49, Décembre 2016.

[H9] Ludovic Goudenège, Robert Eymard, Christiane Coccozza-Thivent et Michel Roussignol. Numerical methods for piecewise deterministic Markov processes with boundary. *IMA J. Numer. Anal.*, 37(1) :170–208, 2017.

[H10] Ludovic Goudenège, Andrea Molent, Xiao, Wei et Antonino Zanette. Fourier-cosine method for pricing and hedging insurance derivatives. *Theoretical Economics Letters*, 8(3) :282–291, Février 2018.

[H11] Ludovic Goudenège, Andrea Molent et Antonino Zanette. Pricing and hedging GMWB in the Heston and in the Black-Scholes with stochastic interest rate models. *Computational Management Science*, pages 1–32, Mars 2018.

Il m'a été donné l'occasion d'encadrer une multitude d'étudiants sur ce type de recherche, notamment par ma collaboration avec Xiao Wei, et mes échanges avec Huiling Wu qui visita CentraleSupélec pendant 6 mois en tant que professeure invitée. La seconde opportunité concerne la création du "Parcours Recherche" de CentraleSupélec durant l'année 2013 alors que je viens de rejoindre ce laboratoire qui portait alors le nom de MICS à l'École Centrale Paris. Ce parcours permet à des étudiants d'être encadrés par un professeur durant leur scolarité à CentraleSupélec, et j'encadre un nouvel étudiant chaque année depuis 4 ans.

- Quentin Peyras qui fut mon premier élève du "Parcours Recherche" de CentraleSupélec. Il travailla sur la simulation de PDMP, avant de finalement rejoindre l'École Normale Supérieure de Cachan.
- Pascal Sitbon qui fit un stage de quelques mois à CentraleSupélec, et durant lesquels il m'aida à écrire des éléments de cours sur les équations aux dérivées partielles stochastiques.
- Cécile Gontier qui fut ma seconde élève du "Parcours Recherche" de CentraleSupélec. Elle travailla sur la simulation de PDMP sous le langage Python.
- Adrian Jarret qui est mon troisième élève du "Parcours Recherche" de CentraleSupélec. Il travaille encore sous ma direction sur des algorithmes d'analyse inverse pour les modèles de Wright-Fisher. Il suit actuellement un stage long à Seattle.
- Elyes Miri qui fut mon quatrième élève du "Parcours Recherche" de CentraleSupélec. Il travailla sur les équations aux dérivées partielles stochastiques
- Andrea Mollent qui était l'élève d'Antonino Zanette. Il a travaillé sur des problèmes de simulations numériques de produits d'assurance-vie, notamment sur une méthode en différences finies utilisant des directions implicites alternées avec une projection sur une base de splines.
- Mengjie Zhang qui développa sous ma direction et celle de Xiao Wei un algorithme pour la simulation de produits "Guaranteed Minimum Accumulation Benefits" (GMAB) sous les modèles de Black-Scholes et Heston par des méthodes de Fourier-Cosine.
- Meng Du qui développa sous ma direction et celle de Xiao Wei un algorithme pour la simulation de produits "Guaranteed Longlife Withdrawal Benefits" (GLWB) sous les modèles de Black-Scholes et Heston par des méthodes de Fourier-Cosine, ainsi que sur des applications de filtres dans des méthodes de pricing utilisant les transformées de Fourier. ce genre de problèmes.
- Ying Zhou qui développa une analyse quantitative et des algorithmes pour la simulation de produits "Guaranteed Minimal Death Benefit" (GMDB) sous les modèles de Black-Scholes, d'Heston et de Vasicek.

- David Mercier et Julie Llobell qui furent mes étudiants durant le projet CEMRACS 2017. Bien que les résultats concernant ces travaux ne sont pas encore tous finalisés (certains résultats sont présents dans le preprint [P6]), ils furent à la base d'un thème de recherche sur des schémas numériques pour la turbulence dans un cadre stochastique.
- Ariel Lanza qui travaille sur les méthodes ADI avec un objectif de les utiliser pour la calibration de modèles. Il a implémenté ces méthodes dans un cadre OpenMP et MPI. Il complète actuellement sa formation au master de probabilités et finance de El Karoui-Pagès-Yor.

9 Méthodes de différences finies et de volumes finis

La simulation numérique fournit un outil efficace pour l'étude des systèmes physiques relevant des sciences de l'ingénieur. Je cite en particulier les champs d'applications sur lesquels je me suis penché : la combustion, la biologie, la fiabilité, la finance et l'assurance. Mais le mathématicien seul ne peut résoudre l'ensemble du problème, il doit s'inscrire dans une démarche pluridisciplinaire qui fait intervenir la modélisation par le praticien, l'analyse mathématique et les simulations numériques. L'ensemble des sujets traités dans cette partie et qui ont donné lieu à des publications s'inscrivent justement dans cette démarche.

Les simulations numériques forment la dernière étape du processus, car le choix de la méthode va dépendre de la modélisation ou du phénomène recherché. Parfois c'est l'analyse mathématique qui nous oriente vers un choix de méthode particulier, car on en connaît les propriétés de convergence, de stabilité, d'estimation d'erreur ou de performances. Dans certains cas, on pourra même comparer différentes méthodes numériques pour démontrer l'efficacité de certaines en termes de temps de calcul par exemple. Aujourd'hui la parallélisation est au centre de toutes ces méthodes, car certaines peuvent en exploiter pleinement les propriétés quand d'autres sont naturellement séquentielles et difficilement parallélisables.

Bien que la méthode des éléments finis soit le premier outil que j'ai utilisé pour simuler notamment les équations de Cahn-Hilliard, ce sont davantage des méthodes de différences finies et de volumes finis qui sont à la base des résultats abordés dans cette partie. En termes d'introduction, considérons l'équation en la variable u pour une donnée f sur l'espace $(0, 1)$

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{avec} \quad u(0) = 0 = u(1)$$

La méthode des différences finies s'appuie sur la formule de Taylor-Lagrange. Considérons un maillage de l'espace $[0, 1]$ par $N + 1$ sous-intervalles de tailles égales en posant

$$h = \frac{1}{N + 1}$$

et en définissant un maillage uniforme de pas h constitué des points $x_i = ih$ pour tout indice $0 \leq i \leq N + 1$. Pour une fonction u suffisamment régulière, on a les deux identités suivantes :

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i - \zeta_i^+ h), \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i + \zeta_i^- h), \end{aligned}$$

où ζ_i^- et ζ_i^+ sont des réels de $(0, 1)$. On en déduit via le théorème des valeurs intermédiaires que

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i + \zeta_i h), \quad \text{avec} \quad |\zeta_i| \leq \max(\zeta_i^-, \zeta_i^+)$$

pour tout $1 \leq i \leq N$. Si on approche la fonction u par la donnée d'un vecteur de taille $N + 2$, noté $(u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1})$, on est amené à résoudre le système

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} &= h^2 f(x_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N, \\ u_{N+1} &= 0. \end{aligned}$$

Pour la méthode des volumes finis, on considère le maillage en volumes $\{(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})\}_{i=1\dots N}$ avec $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ pour tout $0 \leq i \leq N$ et en intégrant l'équation sur un petit volume on obtient

$$u' \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right) - u' \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) = \int_{(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})} f(x) dx.$$

En posant

$$f_i = \frac{1}{h} \int_{(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})} f(x) dx,$$

on est alors amené à résoudre le système

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ u_i - u_{i+1} &= h \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N, \\ \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} &= h f_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N, \\ u_{N+1} &= 0. \end{aligned}$$

Lorsqu'on veut résoudre des équations d'évolution aux dérivées partielles, il faut également considérer les schémas en temps. On doit donc discrétiser l'espace $\{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : x \in \mathcal{D}, t \in [0, T]\}$ Pour cela on choisit un pas d'espace h ou Δx ainsi qu'un pas de temps δt ou Δt et on considère les points

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq J + 1, 0 \leq n \leq N$$

On considère la solution u de l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) &= f(t, x) \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}, \text{ et } t \in]0, T], \\ u(0, x) &= h(x) \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}, \\ u(t, x) &= g(t, x) \quad \text{pour } x \in \partial\mathcal{D}, \text{ et } t \in [0, T], \end{aligned}$$

où f , g et h sont des données du problème, et \mathcal{L} est un opérateur différentiel en espace. Comme précédemment on représente la solution u par la donnée d'une famille de vecteurs $\{(u_0^n, u_1^n, \dots, u_J^n, u_{J+1}^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, et on construit des schémas sous la forme

$$(u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, \dots, u_J^{n+1}, u_{J+1}^{n+1}) = \Phi(\Delta t, \Delta x, g, h, f; (u_0^n, u_1^n, \dots, u_J^n, u_{J+1}^n))$$

avec la donnée initiale $(u_0^0, u_1^0, \dots, u_J^0, u_{J+1}^0) = \Psi(\Delta t, \Delta x, g, h)$ où Φ et Ψ sont généralement représentées par des matrices utilisant le formalisme en différence finies ou en volumes finis décrit précédemment.

L'objectif de cette partie est de montrer comment ces méthodes peuvent être utilisées, certes pour réaliser les simulations numériques de problèmes complexes (cf. les sections 13, 14 et 15), mais également d'un point de vue théorique pour montrer l'existence de solutions à des problèmes issus des probabilités (cf. les sections 10, 11 et 16).

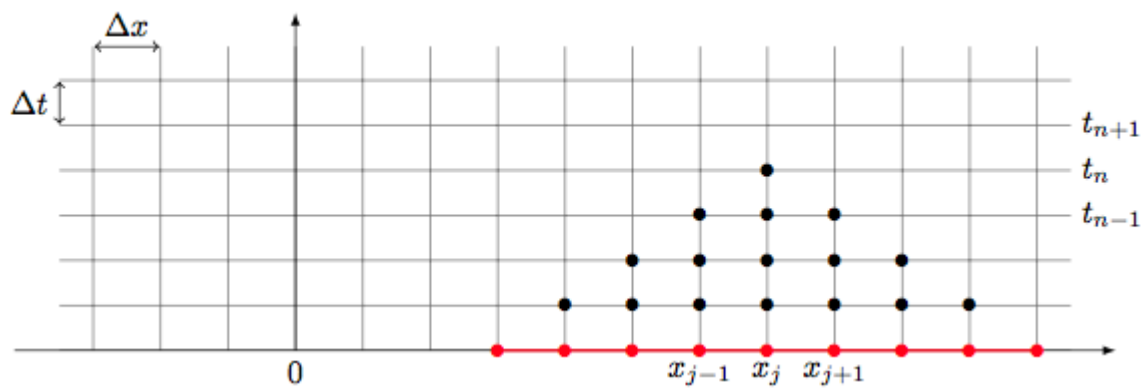


FIGURE 13 : Grille espace-temps pour un schéma en différences finies. Le domaine rouge représente la dépendance du point (x_j, t_n) pour un schéma explicite centré à trois points.

10 Dynamique de Wright-Fisher

Dans mon article avec Pierre-André Zitt [GZ15], nous avons étudié une généralisation du modèle de Wright-Fisher dans lequel des individus adoptent un comportement qui est nuisible pour les autres individus, mais qui ne leur apporte aucun avantage direct. Ce modèle s'inscrit dans une classe plus large de modèles malveillants (“spiteful behavior”). On citera l'exemple de certains hyménoptères parasites (la famille des abeilles, guêpes, fourmis) dont les mâles continuent de tenter de se reproduire alors que leur appareil génital n'est plus fertile, les femelles pensant être fécondées refusent alors tout autre accouplement. Ce comportement semble clairement avoir pour but d'empêcher d'autres mâles de se reproduire afin d'augmenter de manière indirecte la proportion d'enfants issus d'un même père malveillant au sein de la colonie (cf. [DB06, SHR08, Ric96, RPSWT09]). On étudie un modèle reproductif sur une saison, et on l'utilise comme point de départ pour construire un modèle de Wright-Fisher généralisé. Dans la limite de population grande, pour un ratio fixé de mâles malveillants par rapport au nombre de femelles, on montre la convergence du modèle renormalisé vers une diffusion d'Itô dont les termes de dérive et de diffusion généralisent ceux du modèle classique de Wright-Fisher permettant de comprendre explicitement quel est l'avantage indirect sur la sélection naturelle induit par ce comportement malveillant.

10.1 Comportements malveillants et génétique des populations

Le but de la génétique de population est de comprendre comment la composition génétique d'une population évolue avec le temps en réponse à la mutation, la sélection naturelle et les effets aléatoires.

Dans le cas le plus simple, on considère un gène avec un lieu haploïde isolant deux allèles (disons l'allèle cordial C et l'allèle malveillant M), qui affecte le phénotype d'un individu. Un des modèles les plus simples est celui de Wright-Fisher. On pourra consulter les livres [Dur08] et [Eth11] qui décrivent ce modèle ainsi que plusieurs autres. Classiquement, on cherche à complexifier ce modèle en ajoutant de la sélection, c'est-à-dire qu'on accorde à l'allèle C une chance $(1 + \beta)$ plus probable d'être sélectionné à la prochaine génération. C'est la sélection par avantage direct, par exemple l'allèle C pourrait permettre de pondre des œufs qui sont plus résistants aux conditions climatiques.

Dans le cas du comportement malveillant, il n'y a pas d'avantage direct, car on ne cherche pas à fertiliser les œufs, et il n'y a pas non plus d'avantage sélectif d'un allèle sur l'autre. Simplement, cela pourrait permettre un avantage indirect quand à la proportion relative d'œufs issus de pères malveillants. (cf. [Ham70], [Dio07] et [FWR01] pour des détails sur les comportements “spite”).

Un modèle basique pour rendre compte de ce comportement durant une saison reproductrice a été suggéré par F.-X. Dechaume-Moncharmont et M. Galipaud. On considère une urne constituée de c boules cyans et de m boules magentas. Aucune boule n'est marquée. On tire f fois dans l'urne avec la règle suivante :

- Si la boule est cyan, on la marque et on l'enlève de l'urne ;
- Si la boule est magenta et non marquée, on la marque et on la remet dans l'urne ;

- Si la boule est magenta et déjà marquée, on la remet dans l'urne.

Après f tirages, on note X le nombre de boules cyan marquées, et Y le nombre de boules magenta marquées. Les boules représentent les mâles, et chaque tirage représente l'accouplement d'une femelle différente. Les boules cyans jouent le jeu, et se retirent de l'urne une fois l'accouplement effectué. Les boules magentas ne jouent pas le jeu, et même si elles se sont accouplées, elles retournent dans l'urne pour tente de s'accoupler une nouvelle fois (sans fécondation possible de la femelle). Les variables X et Y décrivent le nombre de mâles de chaque espèce qui ont effectivement pu se reproduire.

Afin de montrer que cette stratégie accorde un avantage sélectif, on note

$$\begin{aligned} p_c(c, m, f) &= \mathbb{P}\{\text{Charles est choisi au moins une fois après } f \text{ tirages}\} \\ p_m(c, m, f) &= \mathbb{P}\{\text{Mathias est choisi au moins une fois après } f \text{ tirages}\} \end{aligned}$$

pour une composition initiale de l'urne avec c boules cyans et m boules magentas, ainsi que f tirages, où Charles et Mathias sont des boules particulières dans l'urne respectivement de couleur cyan et magenta.

A l'aide d'un argument de couplages entre deux urnes, on obtient le théorème suivant :

Théorème 10.1. Les mâles malveillants ont un avantage sélectif dans le sens où

$$p_m(c, m, f) \geq p_c(c, m, f).$$

L'inégalité est stricte si $f \geq 2$ et $c, m \geq 1$.

10.2 Limite en grande population

On souhaite quantifier l'avantage sélectif accordé aux mâles malveillants. Pour cela il est naturel de regarder la limite en grande population, quand le nombre de mâles bienveillants, le nombre de mâles malveillants et le nombre de femelles tendent vers l'infini. Pour cela, on décrit l'écart $p_m - p_c$ en termes de la solution v d'une équation aux dérivées partielles.

Dans la limite de population grande, le nombre d'individus (c, m, f) va correspondre à une proportion (x, y, z) dans l'ensemble

$$\mathcal{D} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+ : x + y + z \leq 1\}.$$

Pour $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, avec $y > 0$, nous avons démontré dans [GZ15] que l'équation

$$x(1 - e^{-t}) + yt = z \tag{29}$$

admet une unique solution $T(x, y, z) \in (0, \infty)$. On pose alors deux fonctions définies sur \mathcal{D} telles que :

$$u(x, y, z) = \exp(-T(x, y, z)) \quad \text{et} \quad v(x, y, z) = 1 - u(x, y, z). \tag{30}$$

Une description entièrement heuristique menant à l'équation (29) nous fut décrite par J.E. Taylor lors d'échanges informels. Elle est indiquée dans [GZ15].

On introduit ensuite une discrétisation de l'ensemble \mathcal{D} qui peut être vue comme la description d'une population de taille $N \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{D}_N = \{(c, m, f) \in \mathbb{Z}_+^3 : c + m + f \leq N\}.$$

Pour toute fonction $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, on note g^N sa discrétisation

$$\begin{aligned} g^N : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (c, m, f) &\mapsto g\left(\frac{c}{N}, \frac{m}{N}, \frac{f}{N}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

La plupart des résultats obtenus dans la suite de cette section sont uniformes sur des sous-ensembles de \mathcal{D} ou de \mathcal{D}_N . On ne détaillera pas ici les complexités techniques, mais on peut décrire deux ensembles clés. Fixons $y_0 > 0$ et $s < 1$, on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(y_0) &= \{(x, y, z) \in \mathcal{D} : y \geq y_0\}, \\ \mathcal{D}(s) &= \{(x, y, z) \in \mathcal{D} : z \leq s(x + y)\}. \end{aligned}$$

Le premier ensemble demande qu'il existe une proportion minimale de mâles malveillants. Le second ensemble demande qu'il existe une ratio femelles/mâles (i.e. $z/(x + y)$) qui soit plus petit que s . Il y a donc moins de femelles que de mâles, ce qui semble plutôt naturel pour assurer une persistance à la limite. Les ensembles $\mathcal{D}_N(y_0)$ et $\mathcal{D}_N(s)$ sont les espaces discrétisés correspondants. On montre alors les résultats asymptotiques suivants :

Théorème 10.2. Pour tout $y_0 > 0$, il existe une constante $C(y_0)$ telle que, pour tout N , pour tout $(c, m, f) \in \mathcal{D}_N(y_0)$,

$$\begin{aligned} |p_c(c, m, f) - v^N(c, m, f)| &\leq \frac{C(y_0)}{N}, \\ |p_m(c, m, f) - v^N(c, m, f)| &\leq \frac{C(y_0)}{N}, \end{aligned}$$

où v^N est la discrétisation de la fonction v décrite en (30) et (31).

De plus l'avantage sélectif est de l'ordre de $1/N$, et plus précisément : pour tout $(c, m, f) \in \mathcal{D}_N(y_0)$

$$\left| p_m(c, m, f) - p_c(c, m, f) - \frac{1}{N}(\partial_x v - \partial_y v)^N(c, m, f) \right| \leq \frac{C(y_0)}{N^2}.$$

Lorsque $s < 1$, les bornes sont vérifiées sur $\mathcal{D}_N(s)$ avec une constante $C(s)$.

On peut définir une fonction q de telle sorte que les égalités suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned} q(c - 1, m, f) &= 1 - p_c(c, m, f), \\ q(c, m - 1, f) &= 1 - p_m(c, m, f). \end{aligned}$$

Alors cette fonction q discrète est une approximation de la fonction u définie par l'équation (30), et on peut montrer la convergence des différences discrètes vers les dérivées de u dans le sens suivant.

Théorème 10.3. Pour tout $y_0 > 0$, il existe une constante $C(y_0)$ telle que, pour tout N , et pour tout $(c, m, f) \in \mathcal{D}_N(y_0)$,

$$\begin{aligned} |(q - u^N)(w, b, f)| &\leq \frac{C(y_0)}{N}, \\ |(N\delta_x q - (\partial_x u)^N)(w, b, f)| &\leq \frac{C(y_0)}{N}, \\ |(N\delta_y q - (\partial_y u)^N)(w, b, f)| &\leq \frac{C(y_0)}{N}. \end{aligned} \quad (32)$$

Lorsque $s < 1$, les bornes sont vérifiées sur $\mathcal{D}_N(s)$ avec une constante $C(s)$.

L'idée de ce théorème est de voir une relation de récurrence sur la fonction q comme un schéma numérique. En effet, en conditionnant par le résultat du premier tirage, on montre que

$$q(c, m, f) = \frac{c}{c+m+1}q(c-1, m, f-1) + \frac{m}{c+m+1}q(c, m, f-1) \quad (33)$$

Si ce schéma numérique converge, alors q serait l'approximation discrète d'une fonction u qui pourrait satisfaire une équations aux dérivées partielles. C'est exactement le résultat obtenu dans [GZ15]. La fonction u satisfait l'équation (29) qui peut d'ailleurs être résolue explicitement par la méthode des caractéristiques. Sous la forme (33), on ne voit pas bien le schéma numérique, ni même la forme de l'équation aux dérivés partielles limite. Mais on peut remarquer que

$$\begin{aligned} q(c, m, f) &= \frac{c+m}{c+m+1}q(c, m, f) + \frac{c}{c+m+1}[q(c-1, m, f-1) - q(c, m, f)] \\ &\quad + \frac{m}{c+m+1}[q(c, m, f-1) - q(c, m, f)]. \end{aligned}$$

En multipliant par $(c+m+1)$, on trouve après quelques calculs

$$\begin{aligned} q(c, m, f) &= (c/N) \cdot N [q(c-1, m, f-1) - q(c, m, f)] \\ &\quad + (m/N) \cdot N [q(c, m, f-1) - q(c, m, f)]. \end{aligned}$$

Si $N = c+m+f$ tend vers l'infini et si $(c/N, m/N, f/N)$ converge vers (x, y, z) , le membre de gauche converge vers u , le membre de droite converge vers $x(-(\partial_x + \partial_z)u) + y(-\partial_z u)$, de telle sorte que u vérifie

$$u + x\partial_x u + (x+y)\partial_z u = 0.$$

Puisque $q(c, m, 0) = 1$, on obtient également $u(x, y, 0) = 1$. On définit une équation aux dérivées partielles sous la forme

$$\begin{cases} \forall (x, y, z) \in \mathcal{D}, & u + F \cdot \nabla u = 0, \\ \forall (x, y), & u(x, y, 0) = 1, \end{cases} \quad (34)$$

où F est un champ de vecteurs tel que $F(x, y, z) = (x, 0, x+y)$.

De plus, si u est la solution de l'équation (34) sur \mathcal{D} et u^N sa discrétisation définie sur \mathcal{D}_N par (31), alors, dans le cas d'un schéma consistant, u^N doit vérifier de manière approchée le schéma. On note R_N l'erreur de consistance telle que

$$R_N(c, m, f) = u^N(c, m, f) - \frac{c}{c+m+1}u^N(c-1, m, f-1) - \frac{m}{c+m+1}u^N(c, m, f-1). \quad (35)$$

Proposition 10.4. Pour tout $y_0 > 0$, il existe une constante $C(y_0)$ telle que, pour tout N ,

$$\forall (c, m, f) \in \mathcal{D}_N(y_0), \quad |R_N(c, m, f)| \leq \frac{C(y_0)}{N^2}.$$

Lorsque $s < 1$, les bornes sont vérifiées sur $\mathcal{D}_N(s)$ avec une constante $C(s)$.

On ne donne pas les détails de cette démonstration, mais elle se base sur des arguments classiques. L'erreur entre $q(c, m, f)$ et $u^N(c, m, f)$ est alors majorée par $\frac{C(y_0)}{N}$. En effet, posons $e_N(c, m, f) = q(c, m, f) - u^N(c, m, f)$, par la relation de récurrence (33) et la définition (35) de R_N , pour $c \geq 1$ et $f \geq 1$ on obtient

$$e_N(c, m, f) = \frac{c}{c+m+1}e_N(c-1, m, f-1) + \frac{m}{c+m+1}e_N(c, m, f-1) - R_N(c, m, f).$$

valable pour $c = 0$ en posant $e_N(-1, b, f) = 0$.

On définit ensuite $\bar{e}_N(f) = \max\{|e_N(c, m, f)| : (c, m) \in \mathbb{N}^2, (c, m, f) \in \mathcal{D}_N(y_0)\}$. Le point clef est le suivant : si (c, m, f) est dans $\mathcal{D}_N(y_0)$, alors c'est aussi le cas de $(c-1, m, f-1)$ et $(c, m, f-1)$. D'où

$$\begin{aligned} \bar{e}_N(f) &\leq \bar{e}_N(f-1) + \max\{R_N(c, m, f) : (c, m, f) \in \mathcal{D}_N(y_0)\} \\ &\leq \bar{e}_N(f-1) + \frac{C(y_0)}{N^2}, \end{aligned}$$

donc pour $f \leq N$,

$$\bar{e}_N(f) \leq \bar{e}_N(0) + \frac{C(y_0)}{N}.$$

Puisque $e_N(w, b, 0) = 0$, on a montré l'équation (32) du théorème 10.3. Tous les détails peuvent être trouvés dans l'article [GZ15]. On y trouve également des estimées pour les moments d'ordre 2 en appliquant les mêmes techniques mais pour une équation aux dérivées partielles modifiée.

11 Le modèle multi-génération

11.1 Le modèle classique de Wright–Fisher avec sélection

Le modèle de Wright-Fisher avec sélection est une chaîne de Markov $(X_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ sur l'espace $\mathcal{S}_n = \{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$ qui décrit l'évolution de la fréquence d'apparition d'un allèle dans une population au cours de plusieurs générations. C'est un modèle très simplifié de la réalité où la taille n de la population mâle est fixée. On peut lire les livres [Dur08, Eth11] pour une exposition plus détaillée du modèle. En particulier on suit [Eth11, Section 5.2]. À l'instant $k \in \mathbb{N}$ une proportion X_k^n de la population est cyan. Étant donné l'état $x \in \mathcal{S}_n$ à l'instant $k \in \mathbb{N}$, le prochain état est choisi de la manière suivante :

Première étape. Tous les individus pondent un très grand nombre O d'œufs. Une proportion $s_m(n)$ (respectivement $s_c(n)$) d'œufs magenta (respectivement cyan) survivent à cette étape, si bien qu'il y a $O \cdot n(1-x) \cdot s_m(n)$ œufs magenta et $O \cdot nx \cdot s_c(n)$ œufs cyan.

Seconde étape. La population à l'instant $k+1$, de taille n est choisie en sélectionnant aléatoirement n œufs parmi les survivants. Puisque O est grand, le nombre d'individus cyan est approximativement binomial. Si le ratio des probabilités de survie est

$$1 + \beta(n) = s_c(n)/s_m(n),$$

alors les paramètres de la loi binomiale sont n et $\frac{(1 + \beta(n))x}{(1-x) + (1 + \beta(n))x}$. On tire la valeur \tilde{X}_{k+1}^n suivant cette loi, alors l'état X_{k+1}^n à l'étape $k+1$ est $\frac{1}{n} \tilde{X}_{k+1}^n \in \mathcal{S}_n$.

Dans la limite de population grande $n \rightarrow +\infty$, à grande échelle et dans le régime de sélection faible où $\beta(n) = \beta/n$, il est bien connu que le modèle en population finie peut être approché par une équation différentielle stochastique, on appelle cela une diffusion. L'utilisation de l'approximation diffusive en génétique de populations est un domaine bien établi (cf. [Eth11], [EK86] et [Ewe04]).

Plus précisément, on définit pour tout n un processus continu dit ré-échelonné $(X^n)_{t \geq 0}$ par la formule suivante :

$$\forall t \in [0, 1], (X^n)_t = X_{[nt]}^n.$$

L'approximation diffusive est la suivante :

Théorème 11.1 (Diffusion de Wright-Fisher avec sélection). Dans le cas de sélection faible à la limite, le modèle de Wright-Fisher ré-échelonné $(X^n)_{t \geq 0}$ converge faiblement (au sens de Skorokhod) quand $n \rightarrow +\infty$ vers la diffusion sur $[0, 1]$ décrite par l'équation différentielle $dX_t = \sqrt{a(x)}dB_t + b(X_t)dt$ dont le générateur infinitésimal est $L = \frac{1}{2}a(x)\partial_{xx} + b(x)\partial_x$, où

$$\begin{cases} a(x) = x(1-x), \\ b(x) = \beta x(1-x). \end{cases}$$

Remarque 11.2. Si les œufs cyan survivent mieux que les œufs magenta, alors $s_c(n) > s_m(n)$ si bien que β est positif et la diffusion possède une dérive vers $x = 1$. Si les œufs magenta sont favorisés alors β est négatif et la dérive s’oriente vers 0.

11.2 Un modèle de Wright-Fisher avec sélection indirecte

On peut construire un modèle de Wright-Fisher avec sélection indirecte en utilisant le modèle décrit dans la section 10.1 pour l’évolution d’une seule génération. On cherche à quantifier l’évolution du trait “malveillant” durant plusieurs générations.

Dans la littérature, on trouve de nombreuses extensions du modèle de Wright-Fisher sous différents ré-échelonnements (cf. [CS09] pour une approche unifiée).

Des coefficients qui dépendent de la fréquence d’apparition de l’allèle dans ce type de modèles peuvent apparaître, mais ils sont souvent construits sur des modèles centrés sur les individus (cf. [CS14]). Une autre approche possible est de considérer un modèle de théorie des jeux après l’étape d’accouplement, on cite par exemple [Les05]. La dépendance en la fréquence apparaît plus naturellement dans [Gil74, Gil75] pour la modélisation d’une résistance aux épidémies, et en comparant les distributions des pontes d’œufs. Cependant il n’est fait aucun lien avec des modèles centrés sur l’individu (cf. [Shp07, Tay09] pour des détails de modélisations). Afin de rester exhaustif, on cite rapidement [CFM06, CFM08, Wax11, MW07], mais d’autres détails peuvent être trouvés dans notre article avec Pierre-André Zitt [GZ15].

Ici on fixe une fois pour toutes, le ratio entre les sexes, $s > 0$, et on suppose qu’il y a s femelles pour un mâle, *i.e.* une proportion $1/(1+s) \in (0,1)$ du total de la population est masculine. On considère ensuite une urne avec n boules, on pose $f_n = \lfloor sn \rfloor$ le nombre de femelles, et on note encore l’espace $\mathcal{S}_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ comme étant les valeurs possibles de proportions de boules cyan. Remarquons que la taille totale de la population avec les mâles et femelles réunis est $N = (1+s)n$.

On définit ensuite $(X_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur l’espace \mathcal{S}_n de la manière suivante. On suppose que la proportion initiale de boules cyan dans l’urne à l’instant $k = 0$ est $X_0^n = x \in \mathcal{S}_n$. C’est-à-dire qu’il y a $c = xn$ boules cyan et $m = (1-x)n$ boules magenta. L’état suivant X_1^n est construit en deux étapes.

Première étape. Les f_n femelles choisissent un partenaire suivant le modèle décrit en section 10.1. On obtient \tilde{X}_1^n reproductions avec les mâles cyan et \tilde{Y}_1^n reproductions avec les mâles magenta. Comme précédemment, chacune de ces reproductions donne naissance à un très large nombre d’œufs. Une proportion $s_m(n)$ (respectivement $s_c(n)$) d’œufs magenta (respectivement cyan) survivent à cette étape, et le ratio $s_c(n)/s_m(n)$ est toujours noté $1 + \beta(n)$ avec $\beta(n) = \beta/n$. Après cette étape, il existe un très grand nombre d’œufs, dont une proportion

$$\tilde{Z}_{1,\beta}^N = \frac{(1 + \beta(n))\tilde{X}_1^n}{(1 + \beta(n))\tilde{X}_1^n + \tilde{Y}_1^n}$$

est cyan.

Deuxième étape. On choisit n œufs parmi les survivants. Puisque la population est grande, le nombre d'individus cyan suit une loi binomiale de paramètres n et $\tilde{Z}_{1,\beta}^n$. Finalement on divise ce nombre par n pour obtenir X_1^n , la proportion d'œufs cyan à l'instant $k = 1$.

On répète ce processus pour définir $(X_k^n)_{k \geq 2}$. Et comme précédemment on définit un processus ré-échelonné en accélérant le temps par la formule

$$\forall t \geq 0, (X^n)_t = X_{\lfloor nt \rfloor}^n.$$

Le résultat principal de notre article avec Pierre-André Zitt est d'exhiber une diffusion limite pour le processus ré-échelonné avec une dérive explicite non triviale vers 0. La dérive et la volatilité peuvent être décrites grâce à une seule fonction

$$v_s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto v \left(\frac{x}{1+s}, \frac{1-x}{1+s}, \frac{s}{1+s} \right),$$

où on rappelle que v est la solution de l'équation aux dérivées partielles (30).

Théorème 11.3. Si $s < 1$, le processus ré-échelonné $(X^n)_{t \geq 0}$ converge faiblement (au sens de Skorokhod) quand $N \rightarrow +\infty$ vers la diffusion sur $[0, 1]$ décrite par l'équation différentielle $dX_t = \sqrt{a(x)}dB_t + b(X_t)dt$ dont le générateur infinitésimal est $L = \frac{1}{2}a(x)\partial_{xx} + b(x)\partial_x$, où

$$\begin{cases} a(x) = \frac{x(1-x)}{v_s(x)}, \\ b(x) = x(1-x) \left(\beta - \frac{v'_s(x)}{v_s^2(x)} \right). \end{cases}$$

Remarque 11.4. Lorsque $s \geq 1$, nous n'avons pas réussi à montrer la convergence complète vers la diffusion, mais seulement jusqu'au temps où le processus atteint le point $x = 1 - y_0$. On ignore comment caractériser le comportement à la frontière $x = 1$.

Remarque 11.5. La fonction v_s est très régulière, et en particulier strictement croissante. Si $s < 1$, elle est minorée par une valeur strictement positive. On trouve des bornes explicites dans notre article [GZ15].

Un étude complète de la forme de la dérive et de la volatilité mériterait un article complet. On peut notamment constater que la quantité $2b/a$ détermine complètement les probabilités de réflexion aux frontières et les fonctions d'échelles. On remarque que la dérive peut s'écrire $\bar{\beta} : x \mapsto \beta v_s(x) - \frac{v'_s(x)}{v_s(x)}$ et qu'elle dépend de la fréquence x comme on l'avait annoncé. Lorsque $s \rightarrow \infty$ il y a convergence vers β et tous les mâles se reproduisent ce qui rend la stratégie malveillante sans effet. Si $\beta = 0$, alors $\bar{\beta}(x)$ est négatif, et on construit un avantage non trivial vers 0. Dans le cas général, il peut y avoir un ou plusieurs points équilibres.

11.3 Principales idées de la démonstration vers la diffusion limite

Pour montrer la convergence vers la diffusion limite du théorème 11.3, on peut suivre le schéma de démonstration de Durrett dans [Dur96]. Cela revient à étudier certaines quantités de la chaîne de Markov $(X_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$. On note $\mathbb{E}_x[\cdot]$ et $\mathbf{Var}_x(\cdot)$ la moyenne et la variance pour un départ de chaîne au point $X_0^n = x$. On appelle la variance infinitésimale $a^n(x)$ et la moyenne infinitésimale $b^n(x)$ les quantités définies sur $x \in \mathcal{S}_n$:

$$\begin{aligned} a^n(x) &= n \mathbf{Var}_x(X_1^n), \\ b^n(x) &= n (\mathbb{E}_x[X_1^n] - x), \end{aligned} \tag{36}$$

et on pose

$$c^n(x) = n \mathbb{E}_x[|X_1^n - x|^3].$$

On suppose également que les deux fonctions continues a et b assurent que le problème martingale est bien posé. C'est-à-dire que pour chaque x il existe une unique mesure P_x sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $P_x[X_0 = x] = 1$ et

$$X_t - \int_0^t b(X_s) ds \quad \text{et} \quad X_t^2 - \int_0^t a(X_s) ds$$

sont des martingales locales. Alors la convergence du processus discret est assurée par le théorème suivant :

Théorème 11.6 (Limite de diffusion, [Dur96] Théorème 8.7.1 et Lemme 8.8.2). On suppose que les trois conditions suivantes sont réalisées :

1. La moyenne et la variance infinitésimale convergent uniformément :

$$\begin{aligned} \limsup_n \sup_{x \in \mathcal{S}_n} |a^n(x) - a(x)| &= 0, \\ \limsup_n \sup_{x \in \mathcal{S}_n} |b^n(x) - b(x)| &= 0. \end{aligned}$$

2. La taille des sauts discrets est suffisamment petite dans le sens où

$$\limsup_n \sup_{x \in \mathcal{S}_n} c^n(x) = 0.$$

3. La condition initiale X_0^n converge vers x .

Alors le processus ré-échelonné converge vers la diffusion décrite par les fonctions a et b .

Remarque 11.7. La formulation originale est en dimension d et nécessite plusieurs détails additionnels qui ont été ici simplifiés car inutiles. De plus le problème martingale est bien posé d'après un théorème de Yamada-Watanabe. La démonstration complète est décrite dans notre article [GZ15].

Le théorème 11.6 s'applique et on montre même des estimations de la vitesse de convergence qui s'expriment sous la forme suivante :

Proposition 11.8 (Moyenne et variance infinitésimales).

$$a^n(x) = \frac{x(1-x)}{v_s(x)} + \mathcal{O}(1/\sqrt{n}), \quad (37)$$

$$b^n(x) = x(1-x) \left(\beta - \frac{v'_s(x)}{v_s^2(x)} \right) + \mathcal{O}(1/\sqrt{n}), \quad (38)$$

$$c^n(x) = \mathcal{O}(1/\sqrt{n}),$$

où le symbole “ \mathcal{O} ” signifie :

- uniformément sur l'espace $\mathcal{S}_n \cap [0, x_0]$, pour tout $x_0 < 1$, si $s \geq 1$,
- uniformément sur tout l'espace \mathcal{S}_n , si $s < 1$.

On remarque que la convergence n'est pas réellement uniforme lorsque $s \geq 1$, et on doit considérer la diffusion arrêtée au point $x_0 = 1 - y_0$.

Ce résultat est obtenu grâce à une technique de démonstration basée sur l'étude de la première génération dans l'asymptotique de population grande. Fixons $\beta = 0$ pour simplifier la présentation et posons

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{X}_1^n}{\tilde{X}_1^n + \tilde{Y}_1^n} = \phi(\tilde{X}_1^n, \tilde{Y}_1^n)$$

où $\phi : (x, y) \mapsto x/(x+y)$. Alors, en notant \mathcal{F} la tribu engendrée par $(\tilde{X}_1^n, \tilde{Y}_1^n)$, en conditionnant par cette tribu, on trouve

$$\mathbb{E}_x [X_1^n] = \mathbb{E}_x [\mathbb{E}_x [X_1^n | \mathcal{F}]] = \mathbb{E}_x [\tilde{Z}],$$

donc on est ramené à étudier la variable \tilde{Z} pour calculer la quantité (36).

On pose

$$\tilde{x} = \mathbb{E}_x [\tilde{X}_1^n], \quad \tilde{y} = \mathbb{E}_x [\tilde{Y}_1^n].$$

et on applique alors la formule de Taylor à l'ordre 3 pour la fonction ϕ sur le segment $[(\tilde{x}, \tilde{y}), (\tilde{X}_1^n, \tilde{Y}_1^n)]$ qui s'écrit

$$\phi(\tilde{X}_1^n, \tilde{Y}_1^n) - \phi(\tilde{x}, \tilde{y}) = T_1 + T_2 + T_3 \quad (39)$$

où T_i est un terme d'ordre i . On prend la moyenne de l'égalité (39) pour obtenir

$$\mathbb{E}_x [\tilde{Z}] - x = \mathbb{E} \left[\phi(\tilde{X}_1^n, \tilde{Y}_1^n) \right] - x = (\phi(\tilde{x}, \tilde{y}) - x) + \mathbb{E} [T_1] + \mathbb{E} [T_2] + \mathbb{E} [T_3].$$

La démonstration est terminée si on montre que les termes T_i sont négligeables à l'ordre $n^{-3/2}$ (cf. [GZ15]). En effet

$$\begin{aligned} \frac{b^n(x)}{n} &= \phi(\tilde{x}, \tilde{y}) - x + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{c p_c}{c p_c + m p_m} - \frac{c}{c + m} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= x \left(\frac{p_c - x p_c - (1-x) p_m}{x p_c + (1-x) p_m} \right) + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= x(1-x) \frac{p_c - p_m}{x p_c + (1-x) p_m} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{1}{n} x(1-x) \frac{v'_s(x)}{v_s(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème 10.2 et le fait que $N = (1 + s)n$.

Remarquons ici que c'est encore l'approximation numérique qui fournit le résultat car

$$p_m - p_c = \frac{1}{N}(\partial_x v - \partial_y v)^N(c, m, f) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

On obtiendrait de même

$$\frac{a^n(x)}{n} = \mathbf{Var}_x(X_1^n) = (1 - 1/n)\mathbf{Var}_x(\tilde{Z}) + \frac{1}{n}\mathbb{E}_x[\tilde{Z}]\left(1 - \mathbb{E}_x[\tilde{Z}]\right).$$

où

$$\mathbf{Var}_x(\tilde{Z}) = \frac{1}{n}x(1-x)\frac{v_s(x)(1-v_s(x))}{v_s(x)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

ce qui démontre bien les équations (37) et (38).

12 Modèles en finance et en assurance

On se fixe un marché qu'on suppose complet, sans opportunité d'arbitrage. Sans entrer dans les détails ce sont les conditions habituelles pour que les produits financiers et d'assurance possèdent ce qu'on appelle un prix. Grossièrement, cela veut dire qu'on peut associer une valeur aujourd'hui à un objet financier qui possède une échéance dans le futur et dont la valeur future est donnée par un processus stochastique. La valeur en question est représentée par l'espérance du payoff à la date $t = T$ actualisée à la date $t = 0$.

Posons $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un processus stochastique donné par exemple par une équation différentielle stochastique

$$dS_t = b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

où W_t est un processus de Wiener possiblement en dimension $d \geq 1$. On suppose qu'il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ équipé d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ où \mathbb{Q} est la probabilité risque-neutre sous laquelle les flux peuvent être évalués comme l'espérance des valeurs actualisées. On note h le payoff à la date $t = T$, c'est-à-dire une fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) \end{aligned}$$

qui donne la valeur du produit $\{\Pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ en fonction de la valeur que prendra le processus stochastique $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ à la date $t = T$. On note

$$\Pi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

où \mathcal{F}_t est l'information (la filtration) associée au processus $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Il est clair que ce prix est encore une variable aléatoire. De plus la valeur n'est pas actualisée, il faut pour cela introduire la notion de taux d'intérêts sans risque. On pose

$$dB_t = R_t B_t dt$$

le numéraire associée au taux d'intérêts court sans risque R_t . On suppose alors que $\left\{ \frac{S_t}{B_t} \right\}_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale sous la mesure \mathbb{Q} . Ce qui permet d'associer une fonction de prix déterministe

$$\begin{aligned} \pi : [0, T] \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[h(S_T) \exp \left(- \int_t^T R_s ds \right) \middle| S_t = x \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

C'est la valeur qu'on accorde au produit de payoff h pour la maturité T si le sous-jacent S à la date t vaut x . Étant entendu que c'est la valeur $\pi(0, S_0)$ qui nous intéresse, on est face à une équation "backward". En renversant le temps, et en notant u la fonction de prix retournée, on peut montrer ¹ qu'elle est la solution d'une équation aux dérivées partielles

¹Pour la plupart des produits de type européen, c'est-à-dire sans possibilité d'exercice avant la maturité T . Sinon l'équation devient une inéquation dans le cas des produits de type américain.

de la forme (29) :

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) &= f(t, x) \\ u(0, x) &= h(x) \\ u(t, x) &= g(t, x) \text{ pour } x \in \partial\mathcal{D}\end{aligned}$$

où f , g et h sont des données caractérisant le produit, notamment le payoff h , et \mathcal{L} est un opérateur différentiel en espace caractérisant l'évolution temporelle du sous-jacent $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$, c'est d'ailleurs exactement son générateur infinitésimal, modulo les termes d'actualisation, qui s'apparente dans la plupart des cas à un opérateur de diffusion. On se ramène alors à une méthode complètement déterministe pour évaluer les produits financiers ou d'assurance.

12.1 Modèles de Black-Scholes, Hull-White, Heston et Lévy

Il existe une multitude de modèles pour représenter des évolutions de sous-jacents. L'exemple le plus connu et fondamental est bien évidemment celui de Black et Scholes. On suppose que la dynamique du sous-jacent est donnée par une diffusion de type log-normale, c'est-à-dire

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où μ est une constante en temps représentant la dérive, et σ est ce qu'on appelle la volatilité. Alors l'équation aux dérivées partielles de la forme (29) pour le modèle de Black-Scholes s'écrit pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) - \frac{\sigma^2}{2} x^2 \partial_{xx} u(t, x) - \mu x \partial_x u(t, x) + ru(t, x) &= 0, \\ u(0, x) &= h(x), \\ u(t, 0) &= g(t),\end{aligned}\tag{41}$$

où $g(t)$ est la valeur du produit en cas de faillite du sous-jacent, c'est-à-dire lorsque $S_t = 0$.

Il existe ensuite plusieurs améliorations de ce modèle qui consistent généralement à considérer qu'un des facteurs de risque (ici typiquement μ ou σ) suivent eux-aussi une évolution stochastique.

Lorsqu'on considère un taux d'intérêts stochastique, le modèle le plus simple est celui de Vasicek qui prend en réalité la forme d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$dR_t = \kappa(\theta - R_t)dt + \omega dW_t$$

où κ est la vitesse de retour à la valeur moyenne, θ est la valeur moyenne à long terme, ω est la volatilité instantanée du taux. On peut également noter la quantité $\omega^2/2\kappa$ qui représente la variance à long terme. Malheureusement ce processus n'a pas la propriété de rester positif, ce qui peut être vu comme un effet indésirable dans la modélisation. Une amélioration capable de représenter une courbe de rendement décrivant la structure en maturité est donnée par le modèle de Hull-White. Une courbe de rendement exprime la

relation entre le taux d'intérêts ou le coût d'un emprunt par rapport à la maturité, et la dette de l'emprunteur. Le modèle s'écrit sous la forme

$$dR_t = \kappa(\theta(t) - R_t)dt + \omega dW_t$$

On peut également modéliser la variance de la volatilité sous un modèle similaire, il s'agit du modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \omega\sqrt{V_t}dW_t.$$

où κ est la vitesse de retour à la valeur moyenne, θ est la valeur moyenne à long terme, ω est la volatilité de la variance. On notera que la variance reste strictement positive sous la condition dite de Feller $2\kappa\theta > \omega^2$ ce qui est évidemment nécessaire pour la variance d'une variable aléatoire.

Le modèle de Black-Scholes peut alors être couplé avec le modèle de Vasicek, de Hull-White, ou de Cox-Ingersoll-Ross. On obtient les modèles à deux facteurs suivants :

- Black-Scholes-Hull-White

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t + \sqrt{V_t}S_t dW_t^S, \\ dR_t &= \kappa(\theta(t) - R_t)dt + \omega dW_t^R. \end{cases}$$

avec ρ_{SR} la corrélation entre les deux processus de Wiener considérés.

- Black-Scholes-Cox-Ingersoll-Ross, plus connu sous le modèle d'Heston

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t + \sqrt{V_t}S_t dW_t^S, \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \omega\sqrt{V_t}dW_t^V. \end{cases}$$

avec ρ_{SV} la corrélation entre les deux processus de Wiener considérés.

Il est également possible d'étendre les modèles précédents en considérant des processus de Lévy. On écrira alors

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t dJ_t$$

où J_t est un processus de Poisson composé d'intensité λ et dont la densité de sauts est donnée par divers modèles. Les plus simples étant les modèles de Merton ou de Kou dont les densités sont

- Merton (cf. [Mer71])

$$f_J(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_J} \exp\left(-\frac{(x - \mu_J)^2}{2\sigma_J^2}\right)$$

avec μ_J et σ_J respectivement la moyenne et l'écart-type des sauts.

- Kou (cf. [Kou02])

$$f_J(x) = (1 - p)\eta^+ \exp(-\eta^+ x) \mathbb{1}_{x \geq 0} + p\eta^- \exp(-\eta^- x) \mathbb{1}_{x < 0} \quad (42)$$

avec η^+ et η^- respectivement les intensités des sauts positifs et négatifs.

12.2 Variable annuities

En 2008, en conséquence de la crise des “subprimes”, les marchés financiers subissent des bouleversements qui affectent l’économie mondiale dans son entièreté. Depuis, suite à de nombreuses faillites, des écarts se creusent entre les taux d’intérêts appliqués à différentes émetteurs, et la notion de taux d’intérêts sans risque est remise en cause.

Dans ce contexte, pour les particuliers, il devient d’autant plus difficile de faire le choix entre la prise de risque et les gains espérés. Ils désirent protéger leur épargne, mais tout en gardant la possibilité de profiter des hausses du marché. De plus, dans un contexte démographique défavorable, et avec l’espérance de vie qui s’allonge, les rentes obtenues à la retraite se trouvent fatalement diminuées.

Les compagnies d’assurance s’emparent alors du problème et ils mettent au point des produits qui possèdent un compte d’investissement, tout en garantissant une couverture minimale. On peut retirer de l’argent du compte à des instants définis par le contrat, décider de ne rien faire, ou se retirer du contrat et récupérer tout l’argent du compte. On appelle ces produits des “variable annuities”. Ces produits d’unités de compte à capital minimal garanti semblent devenir une solution pour résoudre les problèmes d’investissement à long terme en tout sécurité, pour se préparer à la retraite. Ils proposent un retour sur investissement minimal après une période longue, tout en essayant de tirer avantage des hausses du marché. Comme observé par [HMMR15], ce genre d’investissement deviennent rapidement un des plus attractifs, et représentent une part considérable de tout le marché, et plus du double des investissements dans les produits dit “fixed annuities”.

La majorité des références de la littérature proposent des produits sous le modèle de Black-Scholes, bien souvent sans même tenir compte de la variabilité des taux d’intérêts ou de la volatilité. C’est cette lacune qui me poussa à développer des produits simplement en considérant des modèles de dynamiques plus complexes. On se propose dans cette partie d’essayer d’expliquer quelques produits de type “variable annuities” qui ont fait l’objet de publications. Dans ces articles, on s’attèle principalement à définir le contexte, à dériver les équations aux dérivées partielles qui permettent de calculer les valeurs des produits considérés, et à développer un algorithme efficace pour la simulation numérique dont les ordres de convergence peuvent être démontrés de manière théorique.

Il existe de nombreux modèles de “variable annuities”, par exemple toute la famille des “Guaranteed Minimal” nommés d’après la spécificité qu’ils ajoutent au produit de base :

- GMDB (“Death Benefit”)
- GMAB (“Accumulation Benefit”)
- GMIB (“Income Benefit”)
- GMWB (“Withdrawal Benefit”)

et qui peuvent être décrits dans un cadre commun (cf. [BKR08]). On ne cherchera pas ici à complexifier la lecture, mais les études suivantes peuvent être étendues à ce cadre commun, et à tout autre produit qui entrerait dans ce cadre sous des modifications mineures. Les produits à très longue échéance, i.e. les “Guaranteed Longlife”, n’entrent pas complètement dans ce cadre. On montrera comment développer une méthode pour ces

produits, notamment par l'étude d'un des plus simples, nommé GLWB pour "Withdrawal Benefit".

Du point de vue de l'assureur, le coût de couverture de ces produits est financé par des prélèvements sur le compte investi sur les marchés à risques. Ils sont alors considérés comme des produits purement financiers, car le risque de mortalité est couvert en utilisant une loi des grands nombres (cf. [LWW16] et [BK16] pour une description des couvertures semi-statiques). Il est ainsi primordial de pouvoir calculer le coût de ces produits en un laps de temps limité, ce qui impose donc de développer des algorithmes numériques efficaces et rapides. De plus, comme ces produits possèdent des maturités longues (typiquement 25 ans pour les GM), voire très longues (60 ans pour les GL), les modèles de Black-Scholes sont bien évidemment insuffisants d'un point de vue modélisation des marchés à long terme. L'extension la plus naturelle est de considérer les modèles de Black-Scholes-Hull-White et d'Heston.

13 Portefeuilles d'assurance à proportion constante

13.1 Description du mécanisme des CPPI

Les portefeuilles d'assurance à proportion constante : “Constant Proportion Portfolio Insurance” en anglais, et notés CPPI, sont des produits alternatifs aux produits d'unités de comptes qui offrent un retour sur investissement minimal, tels que les “variable annuities”. Ils proposent un potentiel de retour sur investissement très élevé, tout en limitant les risques de chute du compte, grâce à une stratégie d'allocation dynamique de la proportion entre les investissements à risques et sans risque. Les CPPI personnalisés ou individualisés, notés iCPPI, prennent en compte les aversions aux risques du bénéficiaire. Mais l'évaluation de la performance de ces produits ne peut pas être réalisée dans un contexte de marchés à variations continues, pour lesquels les allocations peuvent être réalisés instantanément. Dans l'article avec Aymeric Kalife et Saad Mouti (cf. [GKM14]), nous proposons un modèle plus général et bien plus réaliste, qui autorise des sauts dans les valeurs du marché. On montre comment les stratégies dynamiques, ainsi que l'utilisation de produits de couverture spécifiques, peuvent être étendues pour contrôler les risques que la valeur du compte garanti ne tombe sous la valeur minimale fixée par le contrat.

Les portefeuilles d'assurance à proportion constant sont des produits qui promettent un capital minimum garanti à l'échéance. Techniquement on appelle le “floor” la barrière basse infranchissable que le compte ne doit jamais franchir. Afin de garantir la valeur finale, il s'agit en réalité de la valeur finale actualisée par le taux d'intérêts sans risque. On considère un sous-jacent risqué S_t sous un modèle de marchés, et un sous-jacent B_t sans risque au taux d'intérêts constant r . Le “floor” est défini par un processus

$$F_t = F_0 \exp(rt).$$

où $F_0 = \exp(-rT)G$ avec G le capital garanti à maturité. Bien qu'en réalité le produit pourrait ne pas fixer de maturité, et dans ce cas, on fixe au début du contrat la valeur F_0 .

Le nom “proportion constante” signifie qu'une proportion constante de la marge, appelée “cushion” (i.e. la différence entre la quantité d'argent dans le compte et le “floor”), est investie dans les marchés risqués. Cette proportion qu'on appelle le multiplicateur est choisie en fonction de l'aversion au risque du client. On note π_t la quantité d'argent présente dans le compte, alors le “cushion” noté C_t vérifie $C_t = \pi_t - F_t$. La quantité d'argent investie dans les marchés risqués est donc $e_t = m C_t$ où m est le multiplicateur. Lorsque $m > 1$ le payoff du produit est convexe (comme un achat de call) lorsque $m < 1$ il est concave (comme la vente d'un put). De nombreux auteurs (cf. [Per86], [Mer71], [BJ87]) montrent que dans le cas Black-Scholes à temps continu, le CPPI est optimal pour un investisseur possédant une aversion au risque variant linéairement avec son aisance financière. Les valeurs “floor” et multiplicateur étant choisies comme les paramètres d'une fonction d'utilité HARA, afin de maximiser l'utilité attendue de l'investisseur. En effet, on peut montrer sous ces hypothèses restrictives que

$$C_t = C_0 \exp \left(\left(m(\mu - r) + r - \frac{m^2 \sigma^2}{2} \right) t + m\sigma W_t \right)$$

et que le portefeuille V possède une trajectoire analytique

$$\pi_t = F_t + (\pi_0 - F_0) \frac{C_t}{C_0}.$$

Les produits CPPI individualisés adoptent une stratégie qui dépend certes de l'investisseur mais également des conditions du marché. Toutefois, les compagnies d'assurances rencontrent de grandes difficultés pour se couvrir contre ce genre de produits très dynamiques. Cela nous amène à développer des formules, des algorithmes, ou des méthodes numériques, et naturellement les discrétisations en temps (qui sont des conditions naturelles du marché) doivent être prises en compte. On obtient un modèle plus réaliste que le modèle continu. De plus, afin d'étendre la modélisation, nous avons proposés d'ajouter une option de couverture composée d'options put et d'options gap, qui peuvent prendre en compte des modèles de marchés à sauts, typiquement des exponentiels de processus de Lévy. Une calibration du modèle de Kou (42) sur les options call du marché entre 2006 et 2011, pour des volatilités implicites sur la base d'une semaine, mène aux valeurs suivantes :

$$p = 0.64, \eta^+ = 0.16, \eta^- = 0.15, \lambda = 0.62, \text{ et } \sigma = 18.29\%$$

13.2 Contrôler le risque de chute du cours

Habituellement on fixe le multiplicateur au début du contrat. L'exposition au risque dépend donc de l'évolution du "cushion". Mais dans le cas dynamique, elle dépend de la stratégie du multiplicateur face aux mouvements du marché.

Dans le cadre des CERs ("optimal certainty equivalent returns") pour des fonctions d'utilité HARA, les auteurs de [Péz11] montrent que la formule optimale est $m^* = \eta(\mu - r)/\sigma^2$ avec η la sensibilité de l'investisseur, sa tolérance au risque face à son aisance financière. Une autre stratégie se base sur une estimation de la Value-at-Risk (VaR) et c'est l'investisseur qui choisit le niveau de risque. C'est une stratégie orientée vers l'estimation des queues des distributions (dans le cas Black-Scholes, on comprend que c'est certainement une stratégie très peu optimale face aux conditions réelles). En se basant sur le calcul de richesse des portefeuilles basés sur les stratégies VaR, et suivant l'exposition au risque détaillée dans [JMA09], on trouve une expression dynamique pour le multiplicateur

$$m_t = \frac{1}{1 - \exp\left(\left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) - z_p\sigma\sqrt{T - t}\right)}$$

lorsque les paramètres r et σ sont supposés constants, où z_p est la VaR pour le niveau de probabilité p .

Dans le cas des simulation numériques, on peut tenter d'estimer les paramètres sur des fenêtres glissantes, afin de mieux mesurer l'impact des stratégies en conditions réelles. Sur la figure 14, on montre une comparaison entre le multiplicateur basé sur les VaR, et l'optimal. Sur la figure 15, on peut remarquer que pour deux exemples de période de marchés haussiers (2006-2007, et après la crise de 2008), le multiplicateur développé sur-performe l'optimal. Au contraire dans le cas de marchés baissiers, les multiplicateurs

optimaux permettent d'éviter l'effondrement du "cushion", mais ils peinent à capter les périodes de relances haussières.

Afin de palier ce défaut, on peut modifier les stratégies dynamiques avec des estimations de la volatilité. On présente dans les figures 16 et 17 des méthodes basées sur ces différents multiplicateurs optimaux suivant différentes estimations : une estimation de la volatilité réalisée sur une moyenne glissante à court terme et à poids exponentiels (méthode EWMA avec $\lambda = 0.94$), et une estimation sur la volatilité implicite (pour des strikes consistants avec la dernière variation du marché). Par exemple, si le marché chute de 5%, on récupère la volatilité implicite des strikes 95%. Cette dernière stratégie illustre un multiplicateur plus réactif sur les estimations de volatilités implicites. Une étude complète des avantages et inconvénients de ces méthodes à travers des tests sur des données historiques peut être trouvée dans mon article [GKM14].

Enfin, même si la dérivation de formules analytiques pour ces produits est réalisée dans le cadre continu, on ne se protège pas contre des chutes drastiques du marché. Et leur implémentation dans un contexte discrétisé pourrait changer complètement la donne. On doit estimer les probabilités de chute du cours entre deux instants fixés à l'avance par une subdivision en temps. C'est encore possible, même dans le cas de processus de Lévy, car on connaît la densité des sauts négatifs. Les formules sont encore valables, mais on propose de coupler le produit CPPI avec l'achat d'options put ou gap (cf. [Tan10] pour un détail de ces options gap dans un contexte de modèle de Lévy). On obtient ainsi une stratégie de couverture en calculant le strike de l'option gap qui protège contre les chutes du cours. Enfin on peut réaliser des tests numériques sur des données historiques pour montrer l'influence du pas de temps dans la subdivision en temps (cf. [GKM14]).

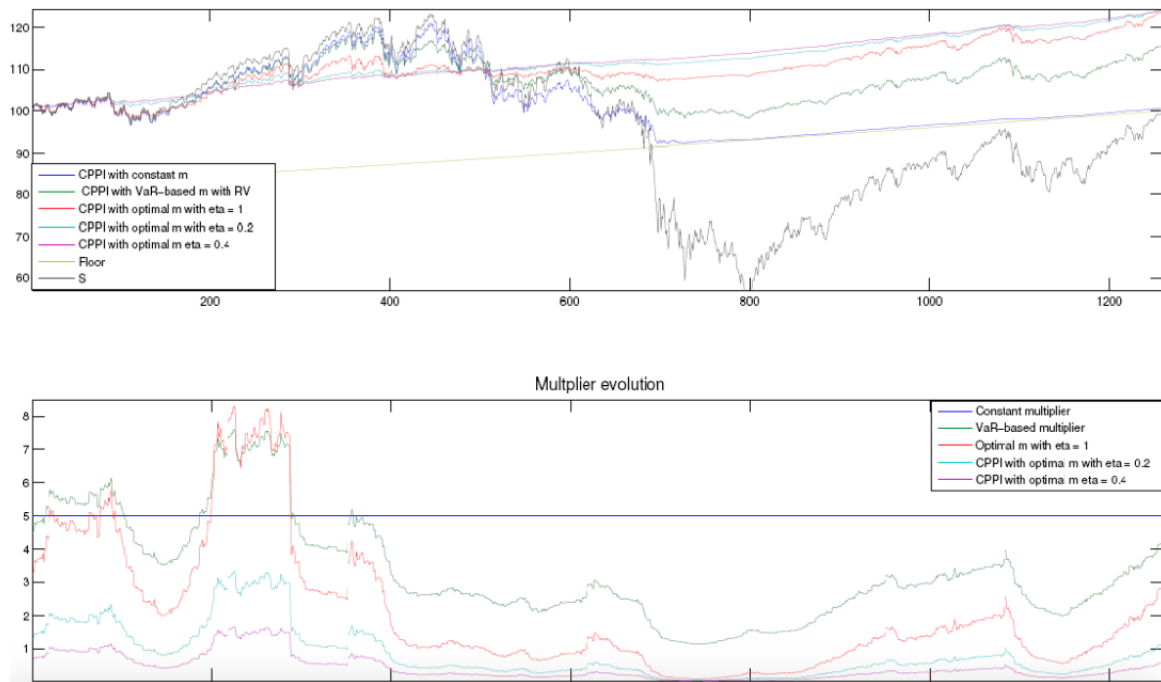


FIGURE 14 : Comparaison entre différents multiplicateurs (constant, basé sur une VaR avec $p = 99.5\%$ et optimaux avec une tolérance au risque $\eta = 0.2, 0.4$ et 1) sur des volatilités réalisées entre 2006 et 2011.

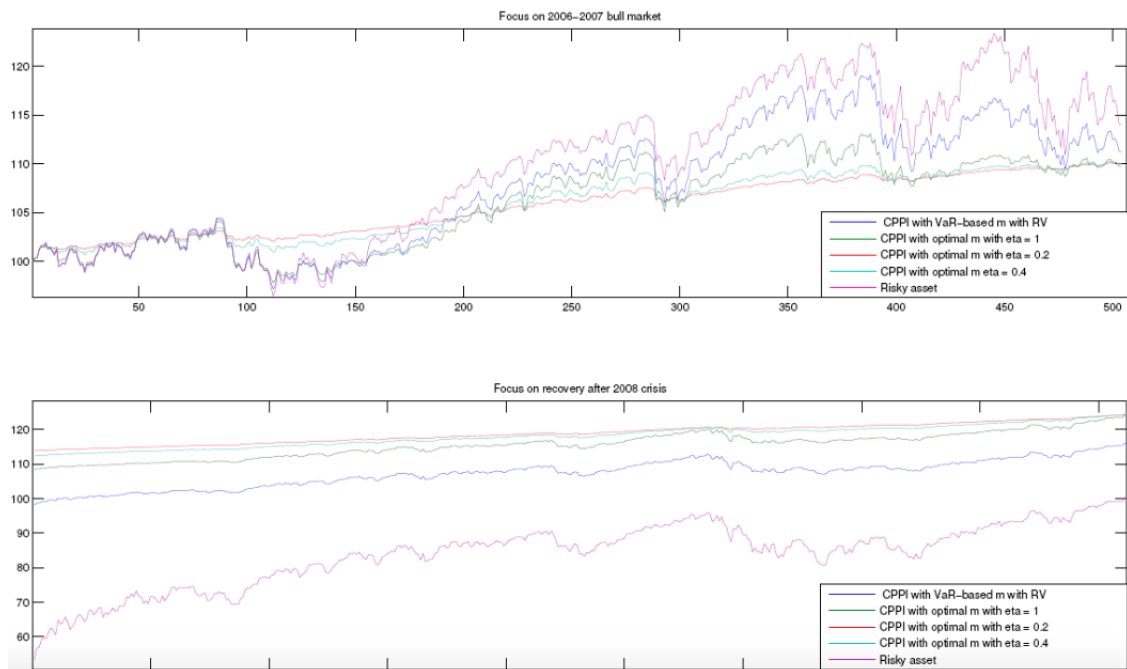


FIGURE 15 : Exemple de deux marchés haussiers pour lesquels le CPPI avec un multiplicateur basé sur la VaR sur-performe les multiplicateurs optimaux.

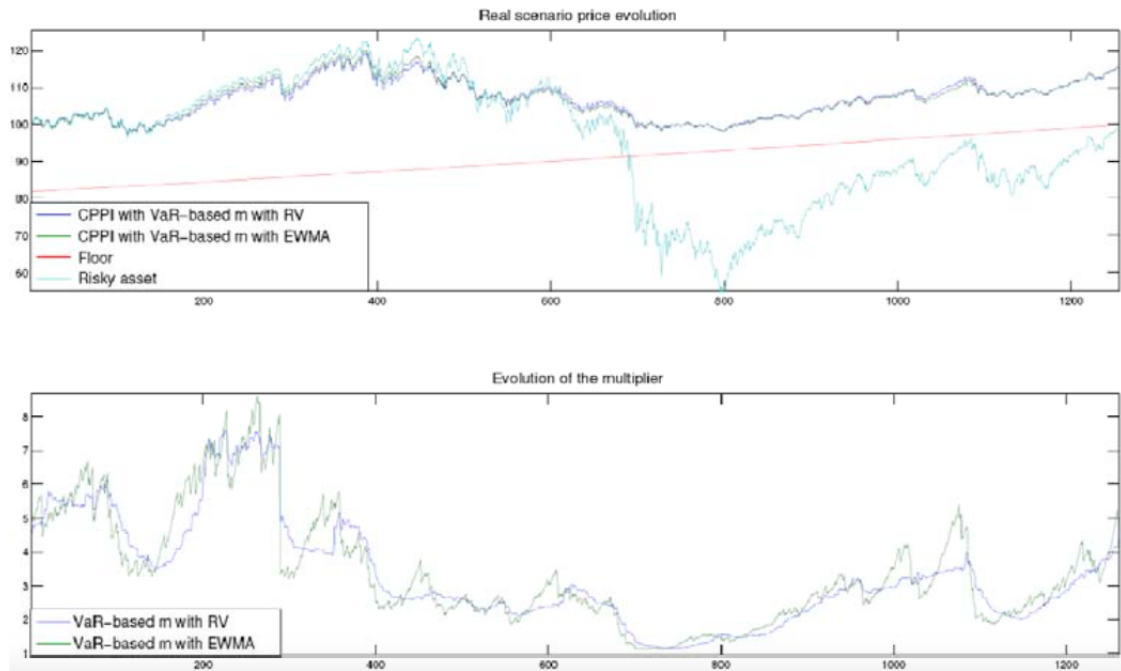


FIGURE 16 : Comparaison sur des données historiques entre les multiplicateurs dynamiques basés sur les volatilités réalisées et la méthode EWMA.

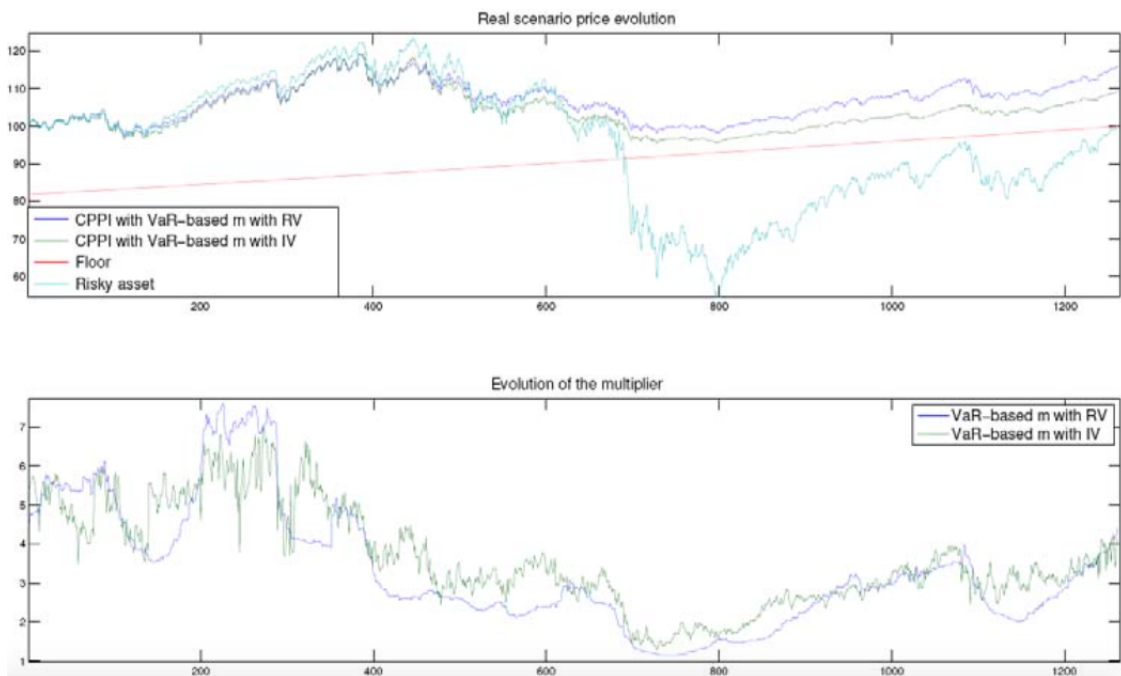


FIGURE 17 : Comparaison sur des données historiques entre les multiplicateurs dynamiques basés sur les volatilités réalisées et les volatilités implicites.

14 Les contrats GLWB et GMWB

Il existe une littérature très riche sur l'évaluation des produits GLWB et GMWB. On y étudie essentiellement les différentes méthodes d'évaluation (décrites plus tard dans ce mémoire), les modèles de marchés utilisés (décrits dans la section 12.1) ainsi que les stratégies adoptées par les investisseurs (simplistes, déterministes, stochastiques, optimales, etc.). On citera en particulier les travaux de Forsyth et Vetzal dans [VF14] sur les GLWB, qui adoptent une évaluation par des équations aux dérivées partielles dans le cadre Black-Scholes. L'utilisation de volatilité stochastique est étudiée dans [KRR14] sous une approche Monte-Carlo. Dans [BMOP11], on trouve une modélisation de l'investisseur qui possède une stratégie semi-statique : il peut décider de retirer de l'argent comme convenu dans le contrat, ou se retirer complètement du contrat.

Pour les produits GMWB, on cite les travaux présents dans [CF07] et [CVF08] qui modélisent une stratégie d'investisseur comme un problème de contrôle stochastique, et adoptent une évaluation par des équations aux dérivées partielles dans le cadre Black-Scholes. On citera également l'article [HK14] dans lequel les auteurs caractérisent complètement les stratégies dynamiques optimales, réduisant l'évaluation à un problème d'arrêt optimal. Toutefois ils considèrent des stratégies continues de l'investisseur, alors que les retraits d'argent du compte ne sont autorisés qu'à des temps discrets. Les stratégies peuvent également dépendre de conditions réalisées par le marché, et être modélisées par une stratégie simple d'optimisation locale en temps. Dans [HFL12] cette stratégie est étendue à des modèles de marchés comportant des sauts. Dans l'article [PLK12], on trouve une modélisation des taux d'intérêts sous le modèle de Vasicek. Sous l'hypothèse de stratégies déterministes des investisseurs, les auteurs développent une formule d'évaluation dont les résultats numériques sont comparés à des méthodes Monte-Carlo. Dans l'article [DJR12], les évaluations des produits et les calculs des Grecques (sensibilités) sont étudiés par une méthode d'équations aux dérivées partielles, et simulées ensuite par un algorithme en différences finies basé sur des méthodes ADI ("Alternating Direction Implicit"). Bien que le modèle utilisé soit un modèle très complet de type Heston-Hull-White, il n'y a pas de stratégie pour l'investisseur, car son comportement est fixe au cours du temps, ce qui est complètement contraire à l'idée même des "variable annuities".

En réalité les contrats de la littérature ne sont pas unifiés, et difficilement comparables. Les contrats les plus analysés sont ceux proposés par Forsyth et Vetzal dans [VF14]; et Chen et Forsyth dans [CF07]; mais on citera également le contrat proposé par Yang et Dai dans [YD13]. Ce sont ces contrats qui furent analysés dans nos articles [GMZ16] et [GMZ18] avec Andrea Molent et Antonino Zanette. Dans ces articles, on étend les formulations précédentes à deux modèles de marchés de type Black-Scholes-Hull-White et Heston. Certaines variations sont également étudiées afin de se comparer à la littérature existante. L'évaluation des produits consiste à chercher le taux de frais sans opportunité d'arbitrage c'est-à-dire l'unique solution qui assure l'existence d'un portefeuille de réplique dans un marché complet. Les détails pour créer les portefeuilles de réplique sont donnés dans [CF07] et [BFL09].

Dans la suite, je vais tenter d'expliquer quelques aspects de la modélisation. Notamment les aspects mathématiques qui amènent à la formulation d'une méthode d'évaluation du taux de frais sans opportunité d'arbitrage par la résolution d'une équation aux déri-

vées partielles. Le lecteur intéressé pourra consulter les articles [GMZ16], [GMWZ18] et [GMZ18].

14.1 Le contrat GLWB

Dans le contrat GLWB, la mortalité joue un rôle primordial car le contrat est à très longue maturité. Le risque de mortalité, s'il est diversifiable, est intégré à la mesure risque-neutre (cf. [MS06]), dans le cas contraire, la valeur risque-neutre doit être ajustée (cf. [GL11]).

Pour décrire la mortalité, on a besoin de deux fonctions :

- $\mathcal{M} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est la densité de probabilité qui décrit la variable aléatoire M associée à l'année de mort d'un investisseur. La fraction d'investisseurs initiaux qui meurent dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ est $\int_{[t_1, t_2]} \mathcal{M}(t) dt$.

- $\mathcal{R} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fraction d'investisseurs initiaux qui sont encore en vie à l'instant t

$$\mathcal{R}(t) = 1 - \int_0^t \mathcal{M}(s) ds.$$

La constante T représente l'instant où tous les investisseurs initiaux ont une probabilité nulle de survivre. Ainsi $\mathcal{R}(0) = 1$ et $\mathcal{R}(T) = 0$.

À l'instant $t = 0$ l'investisseur paye une prime d'entrée notée GP ("Gross Premium"). Cette quantité d'argent arrive sur le compte de base (potentiellement après une déduction liée à des charges). La quantité d'argent déduite des charges notée P ("Premium") est investie dans un sous-jacent. On peut représenter l'état d'un contrat à l'aide de deux variables dynamiques initialisées par P et GP .

- La valeur du compte investi : $A_t, A_0 = P$.
- La valeur du compte de base : $B_t, B_0 = GP$.

La valeur du contrat à l'instant $t \in [0, T]$ est notée $\Pi(t, A_t, B_t)$.

La dynamique du sous-jacent S_t (dont le modèle sera spécifié plus tard) pilote la valeur du compte, mais des frais sont déduits de manière continu par la formule

$$dA_t = \frac{A_t}{S_t} dS_t - \alpha_{tot} A_t dt, \quad (43)$$

où α_{tot} est un taux d'intérêts qui correspond à la valeur des frais déduits. Ce taux comprend des charges de fonctionnement qui sont fixes et qui sont notées α_m (m pour "management"), et des charges, qui permettent de financer le capital garanti, notées α_g (g pour "guaranteed"), telles que

$$\alpha_{tot} = \alpha_m + \alpha_g. \quad (44)$$

La seule quantité qui est utilisée par la compagnie d'assurance pour couvrir le contrat provient de α_g . Quand le détenteur du contrat meurt, la quantité d'argent A_t est payée à ses descendants ou aux bénéficiaires désignés.

Il existe ensuite des dates d'évènements aux instants $\{t_i\}_{1 \leq i \leq n} \in [0, T]$. En pratique, cela correspond à des évènements annuels ou trimestriels. Entre ces dates, le mouvement du sous-jacent est défini par le modèle, mais aux dates d'évènements l'investisseur peut ou doit réaliser des actions précises, et dans cet ordre :

- 1 La compagnie récupère les frais (dans le cas où l'équation (43) n'agirait en réalité qu'aux dates d'évènements et pas de manière continue).
- 2 Si l'investisseur meurt, on vide les comptes, et on paye la valeur A_{t_i} aux bénéficiaires.
- 3 Si l'investisseur est toujours en vie, il a le droit de retirer de l'argent (c'est la rente).
- 4 Si le contrat le prévoit, un ajustement des comptes peut être réalisée.

On note donc $(A_{t_i}^\pm, B_{t_i}^\pm, t_i)$ l'état des variables juste avant (i.e. $t = t_i^-$) et juste l'après (i.e. $t = t_i^+$) l'évènement à la date t_i . Et on note $(A_{t_i}^{k+}, B_{t_i}^{k+}, t_i)$ l'état des variables juste après le sous-évènement numéroté $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ à la date d'évènements t_i . On obtient donc les formules suivantes aux instants $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}
(A_{t_i}^{1+}, B_{t_i}^{1+}) &= (A_{t_i}^- e^{-\alpha_{tot}(t_i - t_{i-1})}, B_{t_i}^-) && \text{frais de la compagnie,} \\
(A_{t_i}^{2+}, B_{t_i}^{2+}) &= (0, 0) && \text{paiement de la prime décès,} \\
(A_{t_i}^{3+}, B_{t_i}^{3+}) &= \mathcal{C}(t_i, A_{t_i}^{2+}, B_{t_i}^{2+}, P_i, \gamma_i) && \text{formule de retrait,} \\
(A_{t_i}^{4+}, B_{t_i}^{4+}) &= \mathcal{A}(t_i, A_{t_i}^{3+}, B_{t_i}^{3+}, P_i) && \text{ajustement des comptes.}
\end{aligned}$$

où P_i est un ensemble de paramètres qui définissent les fonctions \mathcal{C} et \mathcal{A} . Ils sont fixés au début du contrat. La fonction \mathcal{C} dépend également d'une valeur $\gamma_i \in [0, 2]$ qui est la variable d'ajustement décidée par l'investisseur à la date d'évènement. Cette variable nécessite une modélisation supplémentaire, car elle peut dépendre de l'investisseur et de manière dynamique dans le temps. C'est la stratégie de l'investisseur.

14.2 Le contrat GMWB

Les contrats étudiés dans [CF07], [MS06] et [DKZ08] ne tiennent pas compte de la mortalité. L'échéance étant plus courte (typiquement 25 ans), on peut considérer que c'est en effet peu pertinent. Dans notre article nous avons donc décidé de ne pas prendre en compte la mortalité, mais l'extension pourrait être réalisée. Cela signifie que la densité \mathcal{M} est en réalité une distribution de Dirac au point T . La fonction \mathcal{R} est identiquement égale à 1, mais avec $\mathcal{R}(T) = 0$.

Dans le contrat de Chen et Forsyth, la modélisation ressemble au contrat GLWB de Forsyth et Vetzal qui est couvert par la modélisation de la section précédente. Il existe une stratégie statique, pour laquelle la variable de contrôle $\gamma_i \in [0, 2]$ est fixée au début du contrat, et une stratégie dynamique, pour laquelle l'investisseur peut retirer une quantité d'argent W_i inférieure à un seuil G fixé sans pénalité, mais s'il retire une quantité d'argent comprise entre G et $B_{t_i}^{2+}$ une certaine pénalité κ_i est appliquée

Soit $F_i : [0, B_{t_i}^{2+}] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de la quantité d'argent retirée W (la lettre F désigne un flux). Cette fonction exprime la quantité d'argent effectivement perçue par

l'investisseur à la date t_i . Alors

$$F_i(W_i) = \begin{cases} W_i & \text{if } W_i \leq G \\ W_i - \kappa_i(W_i - G) & \text{if } G < W_i \quad (\leq B_{t_i}^{2+}). \end{cases}$$

La formule de retrait est alors

$$(A_{t_i}^{3+}, B_{t_i}^{3+}) = (\max(A_{t_i}^{2+} - W_i, 0), B_{t_i}^{2+} - W_i), \quad (45)$$

et le compte est modifié par la formule

$$\Pi(t_i, A_{t_i}^{3+}, B_{t_i}^{3+}) = \Pi(t_i, A_{t_i}^{2+}, B_{t_i}^{2+}) - F_i(W_i). \quad (46)$$

On comprendre qu'on retire une quantité d'argent du contrat, et que sa valeur s'en trouve diminuée d'autant. On peut noter γ_i la variable de contrôle entre 0 et 2 telle que si $0 \leq \gamma_i \leq 1$ alors $W_i = \gamma_i G$ et si $1 \leq \gamma_i \leq 2$ alors $W_i = G + (\gamma_i - 1)(B_{t_i}^{2+} - G)$.

Dans le contrat de Yang et Dai, la modélisation est encore similaire, mais le niveau G et donc la fonction f_i vont dépendre du compte A et non pas du compte B . Très précisément la valeur G est fixée à l'instant $t = t_1$ proportionnellement à la valeur de $A_{t_1}^+$. Il existe également deux stratégies. Une stratégie statique où l'investisseur retire systématiquement une quantité d'argent G , et une stratégie dynamique pour laquelle l'investisseur peut décider de retirer une quantité d'argent G (i.e. $\gamma_i = 1$) ou se retirer complètement du contrat avec $\gamma_i = 2$.

Pour ces deux contrats le sous-événement 2 n'arrive jamais (tous les investisseurs survivent), excepté à la date de maturité T où tous les investisseurs meurt (en réalité, ils se retirent du contrat qui arrive à échéance).

15 Méthodes numériques pour la simulation

Dans les articles avec Andrea Molent et Antonino Zanette, nous avons considéré quatre méthodes de simulations numériques, et nous avons montré comment exploiter ces méthodes pour obtenir la valeur de contrats d’assurance-vie “variable annuities” de types GLWB et GMWB. Nous avons également mis en lumière les dépendances de ce calcul de prix vis-à-vis des paramètres du modèle, notamment les effets des taux et volatilités stochastiques sous les modèles de Black-Scholes-Hull-White et d’Heston. Une étude numérique a également été réalisée afin de connaître les vitesses de convergence de ces différentes méthodes numériques.

Dans l’article avec Andrea Molent, Xiao Wei et Antonino Zanette, nous avons étendu les résultats précédents pour le contrat GLWB, en ajoutant une cinquième méthode de simulation numérique basée sur les méthodes de Fourier-Cosine, mais uniquement dans le cadre Black-Scholes.

Dans le livre de Yves Achdou et Olivier Pironneau [AP09], on trouve des résultats théoriques, et des méthodes numériques pour calculer les solutions d’équations aux dérivées partielles pour de multiples produits financiers. Le but de cette section et des articles [GMZ16], [GMWZ18] et [GMZ18] est d’étendre ce cadre à l’évaluation de produits d’assurance-vie du type GLWB et GMWB, mais les résultats peuvent certainement être étendus à d’autres cadres.

On cherche donc à caractériser le prix du contrat $\Pi(t, A_t, B_t)$ comme vérifiant une équation similaire à la formulation (40) pour une fonction $\pi(t, a, b)$. Ainsi on pourrait considérer son retournement en temps notée u comme la solution d’une équation aux dérivées partielles de la forme (29).

Mais à cause des évènements, la formulation est bien plus complexe, on peut l’écrire sous la forme suivante en la variable $x = (a, b)$:

$$\begin{aligned} \partial_t u_i(t, x) + \mathcal{L}_i u_i(t, x) &= f_i(t, x) && \text{pour } x \in \mathcal{D} \text{ et } t \in]t_{i-1}, t_i], \\ u_i(t, x) &= g_i(t, x) && \text{pour } x \in \partial\mathcal{D} \text{ et } t \in]t_{i-1}, t_i], \\ u_i(t_i, x) &= \mathcal{F}(t_i, u_{i+1}(t_i, \cdot), \gamma_i)(x) && \text{pour } x \in \mathcal{D}, \\ u_0(0, x) &= h(x) && \text{pour } x \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (47)$$

où \mathcal{F} est une fonction de toute la solution $\{u_{i+1}(t_i, x)\}_{x \in \mathcal{D}}$ qui prend en compte les évènements ainsi que la stratégie γ_i adoptée au temps t_i . Techniquement l’opérateur différentiel \mathcal{L}_i n’agit que sur la variable a qui dépend du sous-jacent S_t , et il n’y a pas de dérivées partielles en la variable b qui apparaît uniquement dans les conditions de bord et d’évènements.

L’existence d’une solution à ce système n’est pas du tout triviale, notamment à cause de la fonction \mathcal{F} qui doit en quelque sorte stabiliser le domaine d’existence, des hypothèses de continuité en la deuxième variable sont attendues. La deuxième difficulté est la présence de la stratégie γ_i qui est un paramètre de contrôle, qui peut prendre plusieurs aspects : déterministe, stochastique, non-local en espace, non-local en temps, etc.

Dans les articles avec Andrea Molent, Xiao Wei et Antonino Zanette, nous nous sommes restreints au cas déterministe statique, au cas déterministe local en temps, et local en espace pour la densité. La valeur γ_i correspond donc à une optimisation au temps

t_i qui ne prend pas en compte les optimisations futures (localité en temps), et une optimisation au point $x = (a, b)$ qui prend en compte la valeur de la solution $u_{i+1}(t_i, a, b)$ (locale en espace, mais au niveau de la densité, car la valeur u est une moyenne des comptes A_t et B_t relativement à la loi du sous-jacent S_t).

Toutefois, le problème d'évaluation n'est pas simplement positionné dans la résolution de ces équations, mais bien dans la recherche des paramètres qui vont assurer la réplication. D'un point de vue assurantiel il s'agit de trouver les paramètres qui vont assurer que le client qui engage une prime GP va effectivement récupérer son capital garanti, et donc qu'à tout instant la compagnie d'assurance peut respecter ses engagements jusqu'à la maturité T où les contrats sont clôturés. Par le renversement du temps, la clôture des contrats est exprimée par la fonction payoff h à l'instant $t = 0$, et c'est la valeur de la fonction u à l'instant T qui représente le début du contrat à l'instant où l'investisseur paye la prime P . On se fixe donc un contrat, c'est-à-dire qu'on spécifie les paramètres P_i pour les fonctions \mathcal{C} et \mathcal{A} (i.e. les pénalités κ_i , les bonus, les ratchet, les roll-up, etc.). On considère ensuite que l'investisseur est malin, c'est-à-dire qu'à tout instant il sait optimiser son comportement en choisissant la valeur γ_i qui lui assure le meilleur rendement localement en temps comme précisé précédemment.

A ce moment, tout est fixé, excepté un seul paramètre, c'est celui sur lequel la compagnie d'assurance peut encore agir. Pour cette raison, on appelle abusivement ce paramètre le prix auquel on vend le contrat. Sans mystère, ce paramètre est le niveau de frais α_g !

Dans ce formalisme, le but est de trouver la valeur du paramètre α_g (cf. (43) et (44)) qui assure une valeur initiale du produit égale à la valeur de la prime brute. On se place donc sur l'intervalle $]t_{n-1}, t_n[$ où $t_n = T$ avec u_n la solution sur cet intervalle et on veut

$$u_n(T, GP, P) = GP. \quad (48)$$

Cette équation exprime qu'en payant la prime GP , les valeurs GP et P sont bien investies dans les comptes A et B au moment de la signature du contrat. Cette équation (48) couplée au système (47) sur-détermine les solutions, et il n'y a plus nécessairement existence au système. Toutefois, les opérateurs \mathcal{L}_i dépendent en réalité du paramètre α_g , on écrit donc le problème sous la forme suivante :

Définition 15.1. Le prix du contrat "variable annuities" est la valeur du paramètre $\alpha_g \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une solution notée u^* à l'équation (47) vérifiant la condition (48).

On ne détaille pas les détails théoriques qui permettent de montrer la consistance de cette définition. L'unicité du paramètre α_g n'est d'ailleurs pas toujours claire, mais il existe généralement au moins localement une unique solution.

Numériquement il s'agit de calculer la solution de l'équation aux dérivées partielles (47) pour une certaine valeur du paramètre α_g , puis d'utiliser une méthode de sécante dans un intervalle prédéfini afin d'approcher la valeur correcte par un procédé itératif qui nécessite donc de résoudre l'équation aux dérivées partielles (47) de multiples fois. Empiriquement une bonne approximation du paramètre α_g est obtenue après 10 itérations. La difficulté de résolution d'une évolution sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, les optimisations locales, le nombre d'étapes n (typiquement 60, ou même 240 si les événements ont lieu trimestriellement), la recherche du paramètre α_g sont autant de raisons de recherche de méthodes

extrêmement efficaces au moins sur un seul intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Leur bon comportement vis-à-vis des méthodes d'optimisations locales joue parfois un rôle crucial dans la vitesse de convergence, ou même la consistance des méthodes numériques. Quelques détails sont donnés dans [GMZ18] où des méthodes d'interpolations linéaires se sont avérées insuffisantes pour assurer une bonne convergence, et des méthodes d'interpolations basées sur des splines ont du être implémentées.

Il est important de remarquer qu'il existe une propriété dite de similarité qui permet parfois d'effacer une dimension. En effet puisque les opérateurs \mathcal{L}_i ne possèdent pas de différentielles en B cela semble assez naturel. Précisément on peut écrire pour tout $\eta > 0$

$$\eta \pi(t, a, b) = \pi(t, \eta a, \eta b). \quad (49)$$

Et il suffit de considérer le cas $b = \hat{b}$ pour une valeur \hat{b} fixée, par exemple $\hat{b} = P$ et puis en choisissant $\eta = \frac{\hat{b}}{b}$, on obtient

$$\pi(t, a, b) = \frac{b}{\hat{b}} \pi\left(t, \frac{\hat{b}}{b}a, \hat{b}\right),$$

ce qui signifie qu'on peut résoudre le problème pour une seule valeur \hat{b} de b et reconstruire toute la surface par des méthodes d'interpolations. Cette réduction est valable pour les modèles GLWB et pour le modèle GMWB de Yang et Dai, mais elle n'est malheureusement pas vérifiée pour le modèle GMWB de Chen et Forsyth.

D'un point de vue global, les méthodes numériques considérées sont les suivantes :

- Une méthode de Fourier-Cosine (mais uniquement dans le cadre black-Scholes) basée sur la reconstruction de la densité à l'aide d'une base de Fourier en cosinus (cf. [GMWZ18])
- Une méthode de Monte-Carlo classique avec la génération de scénarios de la dynamique couplée entre le sous-jacent et le taux d'intérêts ou la volatilité. La génération des scénarios (en sous-jacent et en volatilité) dans le modèle d'Heston a été réalisée par l'algorithme décrit dans [Alf10]. La génération des scénarios (en sous-jacent et en taux d'intérêts) dans le modèle de Black-Scholes-Hull-White a été réalisée par l'algorithme décrit dans [Ost13], avec quelques améliorations pour incorporer les corrélations (cf. [GMZ16] et [GMZ18]).
- Une méthode d'arbre hybride Monte-Carlo introduite dans [BCZ17]. La méthode consiste à construire un arbre qui décrit l'évolution aléatoire du taux d'intérêts ou de la volatilité. Ensuite on se déplace dans l'arbre à l'aide de variables de Bernoulli, et pour chaque noeud de l'arbre, on utilise un schéma d'Euler pour le sous-jacent. Les arbres pour les modèles de Black-Scholes-Hull-White et d'Heston pourraient être obtenus comme dans [ACZ15] ou [NR90]. Mais les performances sont mauvaises dans le cas de grande maturités. C'est pour cela qu'on développe une nouvelle méthode de construction des arbres dans [GMZ16].

- Une méthode d'arbre hybride avec résolution d'équations aux dérivées partielles. On couple un arbre construit comme dans [BCZ15], [BCZ17] pour représenter la variable stochastique, et on résout seulement une équation aux dérivées partielles en la variable du sous-jacent S_t , ou plus précisément en la variable $a \in R_+$. Elle est donc écrite en dimension 1+1 (temps t et espace a).
- Une méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles utilisant des méthodes de directions implicites alternées décrites dans [HitH12]. Il existe plusieurs schémas différents comme le schéma de Douglas, le schéma de Craig-Sneyd, le schéma de Craig-Sneyd modifié, ou le schéma de Hundsdorfer-Verwer. Dans ce cas, le schéma est complètement déterministe mais les équations aux dérivées partielles possèdent une dimension 1+2 (temps t , espace a , variable r ou v représentant respectivement R_t ou V_t).

15.1 Méthode ADI : “Alternating Direction Implicit”

Dans la suite, je ne vais détailler que la dernière méthode des articles [GMZ16] et [GMZ18] car elle entre davantage dans le cadre de cette partie qui traite d'algorithmes déterministes. Pour cela il me faut décrire la forme des équations à résoudre sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Dans le cas du modèle de Black-Scholes, l'opérateur différentiel a été précédemment décrit dans l'équation (41). Mais pour prendre en compte la mortalité dans le modèle GLWB, il faut en modifier la forme avec un terme impliquant α_m . On obtient une équation aux dérivées partielles sur $\mathcal{V}(t, a, \cdot)$ en les variables t (le temps) et a (la valeur du compte courant), mais sans la troisième variable b qui est effacée grâce à la réduction par similarité (je ne détaille pas les modèles sans similarité de réduction pour simplifier la lecture). Pour le modèle de Black-Scholes on obtient

$$\partial_t \mathcal{V} + \frac{\sigma^2 a^2}{2} \partial_{aa} \mathcal{V} + (r - \alpha_{tot}) a \partial_a \mathcal{V} - r \mathcal{V} + \alpha \mathcal{R}(t) a = 0$$

avec $\alpha = \alpha_m$ pour le modèle GLWB, et $\alpha = 0$ pour le modèle GMWB. Son extension aux modèles de Black-Scholes-Hull-White et d'Heston est immédiate, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{V}^{HW} + \frac{\sigma^2 a^2}{2} \partial_{aa} \mathcal{V}^{HW} + \frac{\omega^2}{2} \partial_{rr} \mathcal{V}^{HW} + (r - \alpha_{tot}) a \partial_a \mathcal{V}^{HW} \\ + \rho_{SR} \omega a \sigma \partial_{ar} \mathcal{V}^{HW} + \kappa (\theta(t) - r) \partial_r \mathcal{V}^{HW} - r \mathcal{V}^{HW} + \alpha \mathcal{R}(t) a = 0 \end{aligned}$$

pour le modèle de Black-Scholes-Hull-White, avec la variable r qui correspond au taux d'intérêts stochastique, et l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{V}^{He} + \frac{va^2}{2} \partial_{aa} \mathcal{V}^{He} + \frac{\omega^2 v}{2} \partial_{vv} \mathcal{V}^{He} + (r - \alpha_{tot}) a \partial_a \mathcal{V}^{He} \\ + \rho_{SV} \omega a v \partial_{av} \mathcal{V}^{He} + \kappa (\theta - v) \partial_v \mathcal{V}^{He} - r \mathcal{V}^{He} + \alpha \mathcal{R}(t) a = 0 \end{aligned}$$

pour le modèle d'Heston, avec la variable v qui correspond à la variance stochastique.

De nombreux paramètres doivent être choisis pour obtenir des méthodes numériques efficaces. On cite l'article [HitH12] qui détaille des choix permettant d'assurer la construction de M -matrices, condition suffisante pour la stabilité au sens de Von Neumann. Dans

mes articles, j'ai souvent choisi d'implémenter les schémas de Douglas avec le paramètre centré $\theta = 1/2$ car c'est évidemment le plus simple, mais d'autres schémas détaillés plus tard sont certainement plus optimaux. De plus les conditions de bord décrites par les fonctions g_i sont en réalité toujours considérées comme étant de type Neumann homogène (ou de Dirichlet), mais il est clair que ce n'est pas consistant avec la réalité, et il faudrait appliquer des théorèmes de relèvement pour des conditions plus réalistes. Le problème est qu'il n'existe pas de résultats théoriques sur la forme des conditions de bord pour les produits GLWB et GMWB. Afin d'obtenir des prix réalistes, les grilles sont prises suffisamment grandes pour que la valeur asymptotique fixée par la condition de Neumann homogène ne perturbe pas le calcul proche de la zone d'intérêt centrée au point $x = (GP, P)$.

Sous ces conditions, résoudre les équations aux dérivées partielles en espace consiste à construire une matrice régissant l'évolution d'un vecteur U de taille $J + 1$ sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t U(t) &= M(t)U(t) + G(t), \\ U(0) &= H. \end{cases}$$

où la matrice M et le vecteur G encodent les seconds membres de l'équation, ainsi que les conditions de bord, et le vecteur H encode la donnée initiale. La matrice M peut être décomposée en plusieurs matrices plus simples, typiquement

$$M(t) = M_\times + M_a + M_{rv}(t),$$

où M_a est une matrice ne concernant que les termes différentiels impliquant la variable a et M_{rv} est une matrice ne concernant que les termes différentiels impliquant la variable r ou la variable v suivant qu'on considère le modèle de Black-Scholes-Hull-White ou celui d'Heston. Remarquons que la matrice M_{rv} ne dépend pas du temps dans le cas du modèle d'Heston. Et la matrice M_\times est une matrice ne concernant que les termes différentiels mixtes, c'est-à-dire en réalité l'unique terme impliquant ρ_{SV} ou ρ_{SR} . Par construction de schémas aux différences finies à 3 points (possiblement centrées, décentrées à gauche ou à droite suivant les valeurs des paramètres et des conditions de flux locales), les matrices sont tridiagonales ou pentadiagonales dans le pire des cas (modulo une renumérotation des noeuds de la grille complète). Le terme $-ru$ est ensuite distribué par moitié dans les diagonales de M_a et M_{rv} . Cette méthode s'apparente à une méthode par lignes (MOL), car on va résoudre successivement les lignes dans une première direction, puis dans une seconde direction, profitant de la renumérotation pour utiliser des algorithmes adaptés aux matrices bandes. On discrétise une période $]t_i, t_{i+1}[$ entre deux événements ayant lieu aux dates t_i et t_{i+1} par un pas de temps $\Delta t_i = \frac{t_{i+1} - t_i}{N}$. On note $t_i = t_i^0 < t_i^1 < \dots < t_i^{N-1} < t_i^N = t_{i+1}$ la grille en temps obtenue. On pose U_i le vecteur solution à l'instant t_i , et pour tout $1 \leq n \leq N$, U_i^n le vecteur solution à l'instant $t_i + n\Delta t_i$, les schémas en direction alternées implicites s'écrivent alors sous la forme suivante pour un choix de paramètre $\theta \in [0, 1]$:

- Schéma de Douglas

$$\begin{aligned} Y_0 &= U_i^n + \Delta t_i [M(t_i^n)U_i^n + G(t_i^n)], \\ Y_1 &= Y_0 + \theta \Delta t_i M_a [Y_1 - U_i^n], \\ Y_2 &= Y_1 + \theta \Delta t_i [M_{rv}(t_i^{n+1})Y_2 - M_{rv}(t_i^n)U_i^n + G(t_i^{n+1}) - G(t_i^{n-1})], \\ U_i^{n+1} &= Y_2. \end{aligned}$$

- Schéma de Craig-Sneyd

$$\begin{aligned}
Y_0 &= U_i^n + \Delta t_i [M(t_i^n)U_i^n + G(t_i^n)], \\
Y_1 &= Y_0 + \theta \Delta t_i M_a [Y_1 - U_i^n], \\
Y_2 &= Y_1 + \theta \Delta t_i [M_{rv}(t_i^{n+1})Y_2 - M_{rv}(t_i^n)U_i^n + G(t_i^{n+1}) - G(t_i^{n-1})], \\
\tilde{Y}_0 &= Y_0 + \frac{1}{2} \Delta t_i M_\times [Y_2 - U_i^n], \\
\tilde{Y}_1 &= \tilde{Y}_0 + \theta \Delta t_i M_a [\tilde{Y}_1 - U_i^n], \\
\tilde{Y}_2 &= \tilde{Y}_1 + \theta \Delta t_i [M_{rv}(t_i^{n+1})\tilde{Y}_2 - M_{rv}(t_i^n)U_i^n + G(t_i^{n+1}) - G(t_i^{n-1})], \\
U_i^{n+1} &= \tilde{Y}_2.
\end{aligned}$$

- Schéma de Craig-Sneyd modifié

$$\begin{aligned}
Y_0 &= U_i^n + \Delta t_i [M(t_i^n)U_i^n + G(t_i^n)], \\
Y_1 &= Y_0 + \theta \Delta t_i M_a [Y_1 - U_i^n], \\
Y_2 &= Y_1 + \theta \Delta t_i [M_{rv}(t_i^{n+1})Y_2 - M_{rv}(t_i^n)U_i^n + G(t_i^{n+1}) - G(t_i^{n-1})], \\
\hat{Y}_0 &= Y_0 + \theta \Delta t_i M_\times [Y_2 - U_i^n], \\
\tilde{Y}_0 &= \hat{Y}_0 + \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \Delta t_i [M(t_i^{n+1})Y_2 - M(t_i^n)U_i^n + G(t_i^{n+1}) - G(t_i^{n-1})], \\
\tilde{Y}_1 &= \tilde{Y}_0 + \theta \Delta t_i M_a [\tilde{Y}_1 - U_i^n], \\
\tilde{Y}_2 &= \tilde{Y}_1 + \theta \Delta t_i [M_{rv}(t_i^{n+1})\tilde{Y}_2 - M_{rv}(t_i^n)U_i^n + G(t_i^{n+1}) - G(t_i^{n-1})], \\
U_i^{n+1} &= \tilde{Y}_2.
\end{aligned}$$

- Schéma de Hundsdorfer-Verwer

$$\begin{aligned}
Y_0 &= U_i^n + \Delta t_i [M(t_i^n)U_i^n + G(t_i^n)], \\
Y_1 &= Y_0 + \theta \Delta t_i M_a [Y_1 - U_i^n], \\
Y_2 &= Y_1 + \theta \Delta t_i [M_{rv}(t_i^{n+1})Y_2 - M_{rv}(t_i^n)U_i^n + G(t_i^{n+1}) - G(t_i^{n-1})], \\
\tilde{Y}_0 &= Y_0 + \frac{1}{2} \Delta t_i [M(t_i^{n+1})Y_2 - M(t_i^n)U_i^n + G(t_i^{n+1}) - G(t_i^{n-1})], \\
\tilde{Y}_1 &= \tilde{Y}_0 + \theta \Delta t_i M_a [\tilde{Y}_1 - Y_2], \\
\tilde{Y}_2 &= \tilde{Y}_1 + \theta \Delta t_i M_{rv}(t_i^{n+1})[\tilde{Y}_2 - Y_2], \\
U_i^{n+1} &= \tilde{Y}_2.
\end{aligned}$$

On peut voir qu'il existe plusieurs pas implicites, ce qui justifie la recherche d'algorithmes efficaces pour résoudre les systèmes impliquant les matrices bandes. En pratique, on utilise une décomposition LU qui peut d'ailleurs être réalisée en amont de toutes les itérations pour les matrices qui ne dépendent pas du temps. Au contraire la matrice M_\times qui ne peut pas être vue comme une matrice bande est toujours traitée explicitement. Dans l'article [HitH12], les choix optimaux du paramètre θ sont détaillés en termes de stabilité au sens de Von Neumann.

La mise en place des méthodes ADI peut s'avérer particulièrement difficile, surtout si la dimension en espace devient grande, par exemple on peut penser à un modèle de

Black-Scholes-Hull-White-Heston qui a d'ailleurs déjà été implémenté dans PREMIA, sans toutefois faire l'objet d'une publication. Le traitement des conditions de bord est une question difficile, car les conditions doivent être compatibles avec chaque étape des schémas. D'autant plus que les valeurs intermédiaires Y_i et \tilde{Y}_i ne représentent pas des solutions, elles n'ont donc pas de raison de satisfaire des conditions de bord compatibles avec les conditions de bord de U^n . On peut en réalité montrer qu'elles doivent satisfaire des conditions de bord incomplètes. Et c'est seulement l'étape finale U^{n+1} qui possède des conditions de bord compatibles avec celles de la solution exacte.

15.2 Résultats numériques

Dans l'article [GMWZ18], on ne présente que la méthode Fourier-Cosine dans le cadre Black-Scholes. Dans les articles [GMZ16] et [GMZ18], nous avons comparé les quatre méthodes décrites dans la section précédente. On les note Standard Monte Carlo (*SMC*), Hybrid Monte Carlo (*HMC*), Hybrid PDE (*HPDE*), et ADI PDE (*APDE*).

Afin d'en étudier les qualités numériques, on se fixe 4 configurations (A , B , C , D), avec des tailles de maillage ou de nombre de scénarios grandissants. Ces valeurs ont été choisies pour réaliser des calculs en temps finis : 30 secondes pour la configuration (A), 120 secondes pour (B), 480 secondes pour (C) et 1900 secondes (D). Le cas dynamique étant plus complexe à cause de l'optimisation locale, il nécessite des grilles plus petites pour réaliser le calcul en le temps fixé par la configuration. Pour les méthodes Monte-Carlo, on précise le nombre de scénarios. De plus, pour les méthodes Monte-Carlo dans le cas dynamique, on a besoin de réaliser des projections sur des espaces de petites dimensions (c'est le troisième paramètre visible dans les deux premières colonnes de la table 4). Les méthodes en arbre nécessitent des grilles en temps \times espace (une dimension). Les méthodes en EDP nécessitent des grilles en temps \times espace (deux dimensions). Les valeurs initiales pour la méthode de sécante situent α_g dans l'intervalle $[0, 0.02]$. On utilise la table de mortalité DAV 2004R qui contient des valeurs permettant de reconstruire la fonction \mathcal{M} .

Dans la figure 18, on présente à titre d'exemple les choix de stratégies optimales à l'instant $t = 1$ dans les deux modèles de marchés pour un GLWB. On remarque qu'il faut choisir de se retirer ("total lapse") pour des grandes valeurs du compte, surtout en cas de taux d'intérêts élevés ou de volatilité faible. Il est moins clair de comprendre pourquoi il faut choisir de ne pas retirer d'argent du compte ("no withdrawal"), c'est-à-dire choisir $\gamma_1 = 0$, même si une zone bien délimitée semble se dessiner sur la figure.

	BS HW STATIC				HESTON STATIC			
	HMC	SMC	HPDE	APDE	HMC	SMC	HPDE	APDE
A	$5 \times 1.3 \cdot 10^5$	$1 \times 2.7 \cdot 10^5$	30×400	$18 \times 180 \times 36$	$5 \times 8.6 \cdot 10^4$	$5 \times 7.4 \cdot 10^4$	35×400	$26 \times 260 \times 13$
B	$10 \times 2.3 \cdot 10^5$	$1 \times 9.8 \cdot 10^5$	60×600	$27 \times 270 \times 54$	$10 \times 1.6 \cdot 10^5$	$10 \times 1.4 \cdot 10^5$	70×600	$40 \times 400 \times 20$
C	$20 \times 5.4 \cdot 10^5$	$1 \times 4.9 \cdot 10^6$	100×1000	$40 \times 400 \times 80$	$20 \times 3.8 \cdot 10^5$	$20 \times 3.5 \cdot 10^5$	100×1000	$64 \times 640 \times 32$
D	$40 \times 1.0 \cdot 10^6$	$1 \times 2.0 \cdot 10^7$	200×2000	$62 \times 620 \times 124$	$40 \times 7.3 \cdot 10^5$	$40 \times 7.5 \cdot 10^5$	200×2000	$104 \times 1040 \times 52$

	BS HW DYNAMIC				HESTON DYNAMIC			
	HMC	SMC	HPDE	APDE	HMC	SMC	HPDE	APDE
A	$5 \times 3.3 \cdot 10^3 \times 2$	$5 \times 3.2 \cdot 10^3 \times 2$	30×400	$16 \times 160 \times 32$	$5 \times 3.2 \cdot 10^3 \times 2$	$5 \times 3.2 \cdot 10^3 \times 2$	35×400	$22 \times 220 \times 11$
B	$10 \times 1.6 \cdot 10^4 \times 3$	$5 \times 1.6 \cdot 10^4 \times 3$	60×600	$24 \times 240 \times 48$	$10 \times 1.5 \cdot 10^4 \times 3$	$10 \times 1.5 \cdot 10^4 \times 3$	70×600	$36 \times 360 \times 18$
C	$20 \times 5.2 \cdot 10^4 \times 4$	$5 \times 5.3 \cdot 10^4 \times 4$	100×1000	$38 \times 380 \times 76$	$20 \times 4.9 \cdot 10^4 \times 4$	$20 \times 4.9 \cdot 10^4 \times 4$	100×1000	$60 \times 600 \times 30$
D	$40 \times 1.4 \cdot 10^5 \times 5$	$5 \times 1.6 \cdot 10^5 \times 5$	200×2000	$60 \times 600 \times 120$	$40 \times 1.3 \cdot 10^5 \times 5$	$40 \times 1.3 \cdot 10^5 \times 5$	200×2000	$100 \times 1000 \times 50$

TABLE 4 : Paramètres numériques pour les configurations dans le cas des modèles Black-Scholes-Hull-White (BSHW) et Heston. Comparaison entre les stratégies statiques et dynamiques dans le cas des quatre méthodes numériques.

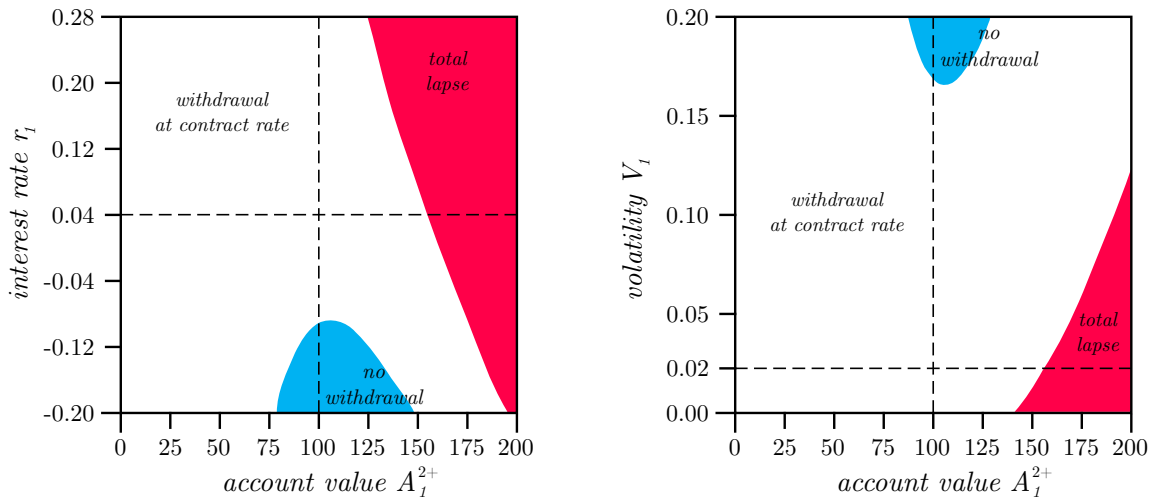


FIGURE 18 : Stratégie locale en temps optimal au premier évènement ($t = t_1$) pour les modèles BSHW et Heston, en fixant $B_1^{2+} = 100$. $\alpha_g = 0.0135$ pour les deux cas. La ligne horizontale en pointillés représente les valeurs de rappel à la moyenne des processus Hull-White et CIR impliqués, et la ligne verticale la valeur de la prime initiale $A_0 = GP = P = 100$.

16 Processus de Markov déterministes par morceaux

Les processus de Markov déterministes par morceaux (PDMP) apparaissent dans de nombreux domaines tels que l'ingénierie, la recherche opérationnelle, la biologie, l'économie, les communications, etc. On peut trouver la définition et les propriétés de ces processus dans le livre de M.H.A. Davis [Dav93]. Plusieurs relations entre les PDMP sans frontière et les processus ponctuels sont développés dans le livre de M. Jacobsen [Jac06]. Récemment, Christiane Coccozza-Thivent s'est intéressée aux relations entre les PDMP et les processus de renouvellement markoviens qui permettent d'étendre la définition initiale à une plus grande classe de PDMP. Dans toutes les applications, la plupart des quantités d'intérêt dépendent de la loi marginale du processus à chaque instant, qui est la solution d'une équation de Kolmogorov généralisée [CT13].

Pour un PDMP sans frontière, c'est-à-dire lorsque le processus ne peut pas atteindre le bord du domaine et lorsque les sauts ont lieu à l'intérieur, il est connu que les équations de Kolmogorov caractérisent ces lois marginales (cf. [CTEMR06, Dav93]). Dans mon article [CTEGR17] avec Christiane Coccozza-Thivent, Robert Eymard et Michel Roussignol, nous avons étudié ces équations généralisées et nous avons étendu leur définition aux PDMP en présence de frontière. Dans ce cas, le processus peut atteindre le bord du domaine en temps fini où il est forcé de sauter. Les équations font alors intervenir simultanément un terme mesure espace-temps qui implique la loi marginale sur un intervalle de temps (comme dans le cas sans frontière), et un terme mesure espace-temps concentré sur la frontière. Cette seconde mesure décrit en termes probabilistes les temps d'arrivées successives et la localisation du processus sur la frontière. Nous avons montré l'unicité de ce couple de mesures, en tant que solution de ces équations.

Nous avons considéré un schéma numérique, capable de traiter les états asymptotiques ainsi que les états transients, et dédié à l'approximation de ces mesures. On notera que les méthodes de Monte-Carlo sont très largement utilisées dans cette optique (cf. par exemple [DCSP97, Lab96, MZ96, ZDDG08]). D'un autre côté, il est établi que les schémas de type volumes finis permettent d'approcher de manière efficace ces lois marginales (cf. [BEP11, CTE04, CTEM06, EM08, EMP08, EMR11, LMRZ11]). Tous ces articles concernent les PDMP sans frontière, excepté [LMRZ11] qui fournit un schéma numérique d'un point de vue pratique sans une étude précise des propriétés mathématiques. Dans notre article, on étudie les propriétés mathématiques de convergence, de stabilité, en caractérisant les conditions nécessaires sur les choix des paramètres d'approximation temporels et spatiaux.

16.1 PDMP avec frontière

On étudie une classe étendue de processus de Markov déterministes par morceaux en présence de frontière. L'espace d'états du processus est un ensemble ouvert F de \mathbb{R}^d et il existe un sous-ensemble Γ de la frontière topologique de F qui va forcer le processus à sauter.

Le PDMP $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique à sauts dont les trajectoires sont déterministes entre ces sauts. Ces trajectoires déterministes sont décrites par un flot $\phi(x, t)$ de la manière suivante : si entre l'instant s et l'instant t ($s < t$) le processus ne saute pas et n'atteint pas non plus la frontière Γ , alors $X_t = \phi(X_s, t - s)$. Bien sûr le flot

possède la propriété de Markov $\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s + t)$ tant que la frontière n'est pas atteinte. Dans [Dav93] le flot est supposé être la solution d'une équation différentielle $\partial_t \phi(x, t) = \mathbf{v}(\phi(x, t))$ sous la condition initiale $\phi(x, 0) = x$ avec \mathbf{v} une fonction localement lipschitzienne. Dans les livres [CT13] et [Jac06], cette hypothèse n'est plus nécessaire.

Deux types de sauts peuvent se produire. Le premier est un saut aléatoire depuis la position $x \in F$ selon un taux de sauts $\lambda(x)$ et une loi de sauts $Q(x, dy)$ qui est une mesure sur F . Le deuxième type de sauts, qui est la nouveauté de notre extension de la classe des PDMP considérés, intervient lorsque le processus atteint un point x de la frontière Γ . Dans ce cas, le processus saute selon la loi de sauts $q(x, dy)$ qui est également une mesure sur F . Ces deux types de sauts sont fondamentalement différents : le premier se réalise selon une loi de probabilité à densité, alors que le second dépend d'une loi de type Dirac.

Détaillons un exemple issu d'un cas pratique de maintenance de deux composants d'un système électronique. L'état des deux composants est décrit par leur âge à chaque instant. Le système défaille lorsqu'un des deux composants tombe en panne. Dans ce cas, une maintenance corrective a lieu immédiatement et le composant est remplacé par un composant neuf ou quasiment, l'autre composant est également changé. La loi décrivant la probabilité de panne de chaque composant est une loi à densité. Lorsqu'une panne survient à l'état $x = (x_1, x_2)$, après la maintenance, les âges des nouveaux composants sont décrits par une variable aléatoire de loi $Q(x, dy_1 dy_2)$ dont le support est très proche de l'état neuf $(0, 0)$. Si l'âge d'un composant atteint une borne L au point $x = (L, x_2)$ ou $x = (x_1, L)$, alors on remplace les composants, et les nouveaux âges sont décrits par une variable aléatoire de loi $q(x, dy_1 dy_2)$ dont le support est également très proche de l'état neuf $(0, 0)$. Le processus stochastique X_t décrivant l'évolution de l'âge des deux composants est un PDMP dans l'espace $F = (0, L) \times (0, L)$ avec la frontière $\Gamma = (0, L] \times \{L\} \cup \{L\} \times (0, L]$. Le flot est donné par $\phi((x_1, x_2), t) = (x_1 + t, x_2 + t)$.

On fait les hypothèses suivantes, notées (H) , sur les données du problème.

1. On se fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des mesures de probabilités sur \mathbb{R}^d pour la tribu des boréliens. Pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{P}(A)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ des mesures de probabilité dont le support est contenu dans A .

2. Le flot $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie les propriétés suivantes :

- (a) $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction lipschitzienne de constante L_ϕ ,
- (b) $\phi(x, 0) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t, s \in \mathbb{R}_+, \quad \phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s)$$

- (c) L'espace $F \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert non vide et $F^c = \mathbb{R}^d \setminus F$ le complémentaire de F est un fermé non vide, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $\phi(x, t) \in F^c$. On peut alors définir $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$\alpha(x) = \inf\{t \geq 0 : \phi(x, t) \in F^c\}.$$

Notons que, pour tout $x \in F^c$, $\alpha(x) = 0$, et que pour tout $x \in F$, puisque ϕ est continue et F^c est fermé, alors $\alpha(x) > 0$. Évidemment on a la propriété suivante :

$$\forall x \in F, \forall t \in (0, \alpha(x)), \quad \alpha(\phi(x, t)) = \alpha(x) - t.$$

On suppose que la fonction α est lipschitzienne de constante de Lipschitz L_α .

(d) On note $\Gamma = \{\phi(x, \alpha(x)) : x \in F\}$. Alors on a $\Gamma \subset \bar{F} \setminus F \subset F^c$, mais on ne peut pas préciser si Γ est fermé ou ouvert.

3. Le taux de transition λ est tel que $\lambda \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, où $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ est l'ensemble des fonctions continues et bornées de \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R}_+ . On note $\Lambda > 0$ une borne supérieure de λ .

4. La probabilité dite de transition $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}(F)$ (on note $x \mapsto Q(x, dy)$ l'application associée) est telle que

(a) il existe une fonction $f_Q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$f_Q(r) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\{y \in F : |y| \geq |x| + r\}} Q(x, dy)$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_Q(r) = 0.$$

(b) pour tout $\xi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la fonction $x \rightarrow \int \xi(y) Q(x, dy)$ est continue de \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R} .

5. La probabilité dite de transition $q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}(F)$ (on note de même $x \mapsto q(x, dy)$ l'application associée) est telle que

(a) il existe une fonction $f_q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$f_q(r) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\{y \in F : |y| \geq |x| + r\}} q(x, dy)$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_q(r) = 0.$$

(b) pour tout $\xi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la fonction $x \rightarrow \int \xi(y) q(x, dy)$ est continue de \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R} .

(c) on suppose qu'il existe deux constantes $a_0 \in (0, 1)$ et $B_0 > 0$ telles que

$$\sup_{z \in \bar{\Gamma}} \int_F e^{-B_0 \alpha(y)} q(z, dy) \leq 1 - a_0.$$

6. On suppose que la loi de la donnée initiale $\rho_{\text{ini}} \in \mathcal{P}(F)$ est connue.

Remarque 16.1. Dans les hypothèses précédentes, on supposera dans un souci de simplification que λ , $Q(\cdot, dy)$ et $q(\cdot, dy)$ sont respectivement définies comme des fonctions continues sur tout l'espace \mathbb{R}^d et pas seulement sur les sous-ensembles \bar{F} , F et $\bar{\Gamma}$ respectivement. Les exemples considérés ont montré qu'il n'est pas difficile de se placer dans ce régime d'hypothèses.

En suivant la procédure décrite dans [CT13, Chapter "Intensités et équations de Kolmogorov généralisées", Section "Equations avant pour le PDMP"], précisons comment on peut construire le PDMP $(X_t)_{t \geq 0}$, avec les paramètres ϕ , λ , Q , α , q satisfaisant les hypothèses (H).

Soit $(T_n, Y_n)_{n \geq 0}$ un processus de renouvellement markovien d'espace d'états F et de noyau de renouvellement N défini de la manière suivante :

$$N(x, dy, ds) = dF_x(s) \beta(x, s; dy),$$

$dF_x(s)$ étant la loi d'une variable aléatoire égale au minimum entre la constante $\alpha(x)$ et une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty[$ de densité de probabilité $\lambda(\phi(x, s)) e^{-\int_0^s \lambda(\phi(x, u)) du}$, c'est-à-dire

$$1_{\mathbb{R}_+}(s) dF_x(s) = \lambda(\phi(x, s)) e^{-\int_0^s \lambda(\phi(x, u)) du} 1_{\{s < \alpha(x)\}} ds + e^{-\int_0^{\alpha(x)} \lambda(\phi(x, u)) du} \delta_{\alpha(x)}(ds)$$

où $1_A \in \{0, 1\}$, avec $1_A = 1$ si et seulement si A est vérifiée, et

$$\beta(x, s; dy) = \begin{cases} Q(\phi(x, s), dy) & \text{si } s < \alpha(x), \\ q(\phi(x, \alpha(x)), dy) & \text{si } s = \alpha(x). \end{cases}$$

Cela signifie que $(T_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de variables aléatoires à valeurs dans $[0, +\infty]$, $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $F \cup \{\Delta\}$ ($\Delta \notin \mathbb{R}^d$ est un point cimetièr) et :

$$\mathbb{P}(T_n < +\infty, Y_n \in F) = \mathbb{P}(T_n < +\infty),$$

$$\mathbb{P}(T_{n+1} - T_n \leq t, Y_{n+1} \in A / Y_0, T_1, Y_1, \dots, T_n < +\infty, Y_n) = N(Y_n, A \times]0, t])$$

pour tout $n \geq 0$, $t \geq 0$ et tout ensemble borélien A de F . En conséquence, la loi de probabilité conditionnelle de $T_{n+1} - T_n$ sachant $T_n < +\infty, Y_n = x$ est $dF_x(s)$ et la loi de probabilité conditionnelle de Y_{n+1} sachant $T_n < +\infty, Y_n = x, T_{n+1} - T_n = s$ est $\beta(x, s; dy)$.

Alors le PDMP $(X_t)_{t \geq 0}$ est défini par

$$X_t = \phi(Y_n, t - T_n) \text{ if } T_n \leq t < T_{n+1}.$$

La condition $\mathbb{E}\left(\sum_{n \geq 0} 1_{\{T_n \leq t\}}\right) < +\infty$, qui est habituellement supposée dans la théorie des PDMP, est satisfaite grâce à l'hypothèse (H.3) et la généralisation de l'hypothèse (H.5c) détaillée dans [CT13].

Soit $(P_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe de transition du processus de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$, défini par

$$P_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_0 = x)$$

pour toute fonction f réelle borélienne bornée sur l'espace F . Les équations “forward” bien connues de Kolmogorov peuvent être écrites sous la forme $P'_t f = P_t Lf$ pour $f \in \mathcal{D}(L)$, ($\mathcal{D}(L), L$) étant le générateur étendu du PDMP, c'est-à-dire tel que

$$\forall f \in \mathcal{D}(L), \quad \int_F f(x) \rho_t(dx) = \int_F f(x) \rho_0(dx) + \int_0^t \int_F Lf(x) \rho_s(dx) ds,$$

ρ_t étant la loi de probabilité de X_t . Ces équations peuvent être décrites via une forme plus générale :

$$\int_F g(x, t) \rho_t(dx) = \int_F g(x, 0) \rho_0(dx) + \int_0^t \int_F \frac{\partial g}{\partial s}(x, s) \rho_s(dx) ds + \int_0^t \int_F Lg_s(x) \rho_s(dx) ds$$

pour les fonctions g qui sont différentiables par rapport à leur seconde variable et telles que $g_s \in \mathcal{D}(L)$ avec $g_s(x) = g(x, s)$.

Quand le flot ϕ est obtenu comme solution d'une équation différentielle, M.H.A. Davis a montré dans [Dav93] que $\mathcal{D}(L)$ est l'ensemble des fonctions réelles mesurables sur l'espace F qui satisfont aux conditions suivantes :

(C1) pour tout $x \in F$, la fonction $t \in [0, \alpha(x)[\rightarrow f(\phi(x, t))$ est absolument continue. Soit

$$\partial_\phi f \text{ telle que pour tout } x \in F, t < \alpha(x), f(\phi(x, t)) - f(x) = \int_0^t \partial_\phi f(\phi(x, s)) ds,$$

(C2) pour tout $x \in F$ tel que $\alpha(x) < +\infty$, $\lim_{t \rightarrow \alpha(x)} f(\phi(x, t))$ existe,

(C3) des conditions d'intégrabilité (non détaillées ici, mais qui sont satisfaites dès que f et $\partial_\phi f$ sont bornées),

(C4) pour tout $x \in \Gamma$, $f(x) = \int_F f(y) q(x, dy)$.

Alors on obtient :

$$\forall f \in \mathcal{D}(L), \quad Lf(x) = \partial_\phi f + \int_F (f(y) - f(x)) \lambda(x) Q(x, dy).$$

A cause de la condition (C4), le domaine $\mathcal{D}(L)$ n'est pas assez grand pour permettre une analyse numérique efficace des équations “forward” de Kolmogorov. Dans le livre [CT13], ces équations ont été généralisées pour contourner cette difficulté. Les fonctions tests qui sont utilisées sont des fonctions mesurables réelles g définies sur $F \times \mathbb{R}_+$ telles que pour tout $(x, a) \in F \times \mathbb{R}_+$, les fonctions $t \in [0, \alpha(x)[\rightarrow g(\phi(x, t), a + t)$ sont absolument continues. Dans notre article [CTEGR17], nous avons construit un espace des fonctions tests compatible avec l'analyse numérique, mais également à la forme du problème considéré. En effet, puisque seules les variations le long des trajectoires sont considérées, la régularité demandée est moindre qu'une régularité par rapport aux deux variables espace et temps.

Définition 16.2 (Espace test \mathcal{T}). Définissons pour tout $T > 0$ l'espace

$$\mathcal{C}_b^T = \{g \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+), \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [T, +\infty[, g(x, t) = 0\},$$

et notons $\mathcal{C}_b^c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) = \bigcup_{T>0} \mathcal{C}_b^T$ l'ensemble des fonctions continues bornées à support compact en temps.

On pose alors \mathcal{T} l'ensemble des fonctions g telles qu'il existe deux fonctions $I, J \in \mathcal{C}_b^c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ avec

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, g(x, t) = J(\phi(x, \alpha(x)), t + \alpha(x)) - \int_0^{\alpha(x)} I(\phi(x, s), t + s) ds.$$

On peut alors noter $g = \mathbb{T}(I, J)$ et évidemment $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}_b^c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$.

Cette définition de l'espace \mathcal{T} est compatible avec le problème grâce aux propriétés suivantes. Si $g = \mathbb{T}(I, J) \in \mathcal{T}$, il est aisé de vérifier que $g = J$ sur $F^c \times \mathbb{R}_+$ et

$$\forall (x, a) \in F \times \mathbb{R}_+, \forall t < \alpha(x), g(\phi(x, t), a + t) - g(x, a) = \int_0^t I(\phi(x, s), a + s) ds. \quad (50)$$

Donc pour $x \in F$ et $a \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \in [0, \alpha(x)[\rightarrow g(\phi(x, t), a + t)$ est absolument continue et $I = \partial_{t,\phi} g$ sur $F \times \mathbb{R}_+$ où

$$\partial_{t,\phi} g(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(\phi(x, 1/n), t + 1/n) - g(x, t)}{1/n}$$

L'opérateur $\partial_{t,\phi}$ est appelé la dérivée le long du flot.

Réciproquement si g vérifie (50) avec $I \in \mathcal{C}_b^c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, en laissant t tendre vers $\alpha(x)$ on obtient

$$g(x, a) = g(\phi(x, \alpha(x)), a + \alpha(x)) - \int_0^{\alpha(x)} I(\phi(x, s), a + s) ds.$$

De plus, pour des fonctions données $I, J, \tilde{I}, \tilde{J} \in \mathcal{C}_b^c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, telles que $g = \mathbb{T}(I, J) = \mathbb{T}(\tilde{I}, \tilde{J})$, on obtient $I = \tilde{I}$ sur $\bar{F} \times \mathbb{R}_+$ et $J = \tilde{J} = g$ sur $F^c \times \mathbb{R}_+$.

Définissons enfin la mesure σ sur $\Gamma \times \mathbb{R}_+$ de la manière probabiliste suivante :

$$\sigma(A \times [0, t]) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_{T_n-} \in A, T_n \leq t, T_n - T_{n-1} = \alpha(Y_{n-1}))$$

pour tout ensemble borélien $A \subset \Gamma$ et pour tout $t \geq 0$. La mesure σ est l'intensité d'un processus ponctuel marqué $(T_n, X_{T_n-})_{n \geq 1}$ restreint à l'instant T_n du saut qui survient quand le processus atteint la frontière. Cette mesure décrit le nombre moyen de fois que les trajectoires atteignent certaines zones de la frontière.

Il est démontré dans [CT13] que les mesures ρ_t et σ construites grâce à la loi d'un tel PDMP satisfont l'équation suivante pour toute fonction test $g \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} \int_F g(x, t) \rho_t(dx) &= \int_F g(x, 0) \rho_0(dx) + \int_0^t \int_F \partial_{t,\phi} g(x, s) \rho_s(dx) ds \\ &+ \int_0^t \int_F \lambda(x) \int_F (g(y, s) - g(x, s)) Q(x, dy) \rho_s(dx) ds \\ &+ \int_{\Gamma \times]0, t]} \int_F (g(y, s) - g(z, s)) q(z, dy) \sigma(dz, ds). \end{aligned} \quad (51)$$

De plus il est démontré que les hypothèses (H) impliquent $\rho_t(\mathbb{R}^d \setminus F) = 0$.

Cette équation n'étant pas complètement satisfaisante dans sa forme, nous avons cherché à la modifier légèrement. Dans une première étape, on étudie l'unicité des mesures $\bar{\mu}$ sur $\bar{F} \times \mathbb{R}_+$ et $\bar{\sigma}$ sur $\bar{\Gamma} \times \mathbb{R}_+$ qui satisfont l'équation suivante pour toute fonction test $g \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_F g(x, 0) \rho_{\text{ini}}(dx) + \int_{\bar{F} \times \mathbb{R}_+} \partial_{t,\phi} g(x, t) \bar{\mu}(dx, dt) \\ &+ \int_{\bar{F} \times \mathbb{R}_+} \lambda(x) \left(\int_F g(y, t) Q(x, dy) - g(x, t) \right) \bar{\mu}(dx, dt) \\ &+ \int_{\bar{\Gamma} \times \mathbb{R}_+} \left(\int_F g(y, t) q(z, dy) - g(z, t) \right) \bar{\sigma}(dz, dt). \end{aligned} \quad (52)$$

Théorème 16.3 (Unicité). Sous les hypothèses (H), il existe un unique couple $(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$ de mesures sur $\bar{F} \times \mathbb{R}_+$ et $\bar{\Gamma} \times \mathbb{R}_+$ respectivement qui est solution de l'équation (52).

Puisque les mesures $\mu(dx, dt) = \rho_t(dx)dt$ et $\sigma(dz, dt)$, résultantes de la construction probabiliste, sont telles que l'équation (51) est vérifiée, alors elles sont également solution de (52). L'unicité de la solution $(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$ à l'équation (52) montre que $\mu = \bar{\mu}$ et $\sigma = \bar{\sigma}$. Les mesures $\bar{\mu}$ et $\bar{\sigma}$ possèdent alors les propriétés suivantes héritées des propriétés des mesures probabilistes ρ_t et σ :

$$\bar{\mu}(\mathbb{R}^d \setminus F \times \mathbb{R}_+) = \bar{\sigma}(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma \times \mathbb{R}_+) = 0.$$

Il est toutefois possible de montrer directement, c'est-à-dire sans faire appel à la théorie des probabilités décrites précédemment, et par des outils d'analyse, que la solution de l'équation (52) doit nécessairement vérifier $\bar{\mu}(dx, dt) = \rho_t(dx)dt$ et $\bar{\mu}(\mathbb{R}^d \setminus F \times \mathbb{R}_+) = 0$. Cette démonstration alternative a été décrite dans les annexes de notre article [CTEGR17].

Puis, dans une seconde étape, on définit un schéma numérique qui converge vers la solution de l'équation (52). Cela justifie l'utilisation de cette équation pour caractériser le modèle plutôt qu'utiliser l'équation (51).

16.2 Un schéma volumes finis

Dans la section précédente, on a essayé de construire un espace de fonctions tests dont on désirait qu'il soit compatible à la fois avec le problème et avec l'analyse numérique. Les

schémas numériques considérés sont des schémas volumes finis, qui sont très largement utilisés par les ingénieurs pour l'approximation d'équations impliquant un équilibre de flux. On considère donc que l'équation (52) est une équation d'équilibre de flux qui décrit la conservation de la masse totale de la loi. On introduit une discrétisation volume finis décrites par les notations et définitions suivantes, qu'on appellera les hypothèses (HD).

1. On définit une mesure de référence, notée dx ou dy , sur F , sur les ensembles boréliens de \mathbb{R}^d restreints à F .
2. Un maillage admissible \mathcal{M} de F est une partition mesurable dénombrable de F , telle que $\cup_{K \in \mathcal{M}} K = F$ et $\forall (K, L) \in \mathcal{M}^2, K \neq L \Rightarrow K \cap L = \emptyset$.
3. $\forall K \in \mathcal{M}, |K| := \int_K dx > 0$.
4. $\sup_{K \in \mathcal{M}} \text{diam}(K) < +\infty$ où $\text{diam}(K) = \sup_{\{(x,y) \in K^2\}} |x - y|$. On pose alors $h := \sup_{K \in \mathcal{M}} \text{diam}(K)$.
5. $\tau > 0$ et $dt > 0$ sont des valeurs fixées, et on note $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \delta t, \tau)$.

La valeur $\tau > 0$, qui a vocation à tendre vers 0, est utilisée pour définir pour tout $K \in \mathcal{M}$ et pour tout $L \in \mathcal{M}$, le flux de masse de probabilité qui part de K pour aller dans L :

$$v_{KL} = \frac{1}{\tau} |\{x \in K : \alpha(x) > \tau \text{ et } \phi(x, \tau) \in L\}|, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \forall L \in \mathcal{M}. \quad (53)$$

Grâce à la régularité induite par les hypothèses (H.2), (H.3), (H.4) et (H.5), on peut définir

$$q_{KL} = \frac{1}{\tau} \int_{\{x \in K : \alpha(x) \leq \tau\}} \int_L q(\phi(x, \alpha(x)), dy) dx, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \forall L \in \mathcal{M}, \quad (54)$$

$$q_K = \frac{1}{\tau} |\{x \in K : \alpha(x) \leq \tau\}|, \quad \forall K \in \mathcal{M}.$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_{KL} &= \int_K \lambda(x) \int_L Q(x, dy) dx, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \forall L \in \mathcal{M}, \\ \lambda_K &= \int_K \lambda(x) dx = \sum_{L \in \mathcal{M}} \lambda_{KL}, \quad \forall K \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (55)$$

On peut alors définir une famille $(p_n^{(K)})_{n \in \mathbb{N}, K \in \mathcal{M}}$ de nombres réels grâce au schéma volumes finis implicite en temps suivant, valable pour tout $K \in \mathcal{M}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |K| \frac{p_{n+1}^{(K)} - p_n^{(K)}}{\delta t} + \sum_{L \in \mathcal{M}} \left(v_{KL} p_{n+1}^{(K)} - v_{LK} p_{n+1}^{(L)} \right) \\ + (\lambda_K + q_K) p_{n+1}^{(K)} - \sum_{L \in \mathcal{M}} p_{n+1}^{(L)} (\lambda_{LK} + q_{LK}) = 0, \end{aligned} \quad (56)$$

avec la condition initiale suivante :

$$|K|p_0^{(K)} = \int_K \rho_{\text{ini}}(dx), \quad \forall K \in \mathcal{M}. \quad (57)$$

On peut remarquer que la propriété suivante est vérifiée :

$$\tau \left(\sum_{L \in \mathcal{M}} v_{KL} + q_K \right) = |K|, \quad \forall K \in \mathcal{M}.$$

Du coup, le schéma (56) peut se réécrire

$$\left(\left(1 + \frac{\delta t}{\tau} \right) |K| + \delta t \lambda_K \right) p_{n+1}^{(K)} - \delta t \sum_{L \in \mathcal{M}} p_{n+1}^{(L)} (v_{LK} + \lambda_{LK} + q_{LK}) = |K| p_n^{(K)},$$

$\forall K \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}.$

On définit alors l'approximation $P_{\mathcal{D}}(dx, dt)$ (respectivement $\sigma_{\mathcal{D}}(dx, dt)$) de la mesure $\mu(dx, dt)$ sur $\bar{F} \times \mathbb{R}_+$ (respectivement $\sigma(dx, dt)$ sur $\bar{\Gamma} \times \mathbb{R}_+$) par les quantités suivantes valables pour toute fonction continue bornée $f \in \mathcal{C}_b^c$:

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} f(x, t) P_{\mathcal{D}}(dx, dt) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} p_{n+1}^{(K)} \int_K f(x, n\delta t) dx,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} f(x, t) \sigma_{\mathcal{D}}(dx, dt) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} p_{n+1}^{(K)} \frac{1}{\tau} \int_{\{x \in K : \alpha(x) \leq \tau\}} f(\phi(x, \alpha(x)), n\delta t) dx.$$

On définit également l'approximation $P_{\mathcal{D}}(t)dx$ de la loi ρ_t du PDMP telle que

$$\int_{\bar{F}} \xi(x) P_{\mathcal{D}}(t) dx = \sum_{K \in \mathcal{M}} p_{N_t+1}^{(K)} \int_K \xi(x) dx, \quad \forall \xi \in C_b(\mathbb{R}^d), \quad (58)$$

avec N_t donné par $N_t dt \leq t < (N_t + 1)dt$.

Les choix qui nous ont menés à élaborer ce schéma, dépendant de la taille h du maillage et des deux paramètres τ et δt , résultent des observations suivantes :

1. Une version explicite du schéma aurait pu être définie, en suivant les idées de [CTEM06]. Mais le principal inconvénient d'un schéma explicite est qu'il n'est en général pas adapté à une approximation des lois marginales asymptotiques en temps long, sous la contrainte d'un temps de calcul raisonnable.
2. Un schéma implicite a été proposé dans [EMP08]. Mais ce schéma considère que le flot est beaucoup plus régulier, car on suppose qu'il est la solution d'une équation différentielle ordinaire, ce qui est en réalité trop restrictif dans la plupart des applications. On pourra trouver dans notre livre avec Christiane Coccozza-Thivent des exemples pratiques d'utilisation de ces différentes variantes dans un cadre d'applications issues de la fiabilité.

3. Un schéma explicite a été introduit dans [BEP11] pour des flots à régularité lipschitzienne. Le schéma présenté ici utilise un paramètre $\tau > 0$ qui était utilisé comme pas de temps dans le schéma [BEP11]. Pour ce schéma, la convergence a été démontrée dans le cas $\delta t \rightarrow 0$ et $h/\delta t \rightarrow 0$.
4. Dans [EM08], les états asymptotiques en temps long ont pu être obtenus en faisant tendre le paramètre $\delta t \rightarrow \infty$ dans un schéma implicite. De fait il était donc intéressant d'utiliser les paramètres h et τ qui devaient tendre vers 0 indépendamment de la valeur δt .

Puisque (56) est un système linéaire infini, l'existence et l'unicité d'une solution positive représente la première difficulté.

Lemme 16.4 (Existence de solution). Sous les hypothèses (H) et (HD), il existe une unique solution $(p_n^{(K)})_{K \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}}$ au schéma défini par (53), (54), (55), (56), (57), qui vérifie :

$$p_n^{(K)} \geq 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (59)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K| p_n^{(K)} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (60)$$

16.3 Tension et finitude

Afin de montrer la convergence des mesures approchées, on doit montrer la finitude et la tension de la famille construite. On trouvera les démonstrations de ces deux propriétés dans [CTEGR17]. Elles sont basées sur des estimations locales complexes permises par les hypothèses (H.4) et (H.5).

Lemme 16.5 (Finitude). Sous les hypothèses (H) et (HD), soit $(p_n^{(K)})_{K \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}}$ l'unique solution au schéma défini par (53), (54), (55), (56), (57) et qui satisfait (59)-(60). Alors, pour tout $T > 0$, $h < \tau$ et $\delta t \leq T$, il existe une constante $C_\sigma > 0$, dépendante uniquement de T , a_0 , B_0 et α , telle que

$$\int_{\Gamma \times [0, T]} \sigma_{\mathcal{D}}(dx, dt) = \sum_{n \in \mathbb{N}, n\delta t \leq T} \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} q_K p_n^{(K)} \leq C_\sigma.$$

Lemme 16.6 (Tension de $P_{\mathcal{D}}$). Sous les hypothèses (H) et (HD), et pour $T > \delta t$, soit $(p_n^{(K)})_{n \in \mathbb{N}, K \in \mathcal{M}}$ l'unique solution au schéma défini par (53), (54), (55), (56), (57) et qui satisfait (59)-(60). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $R > 0$, dépendante uniquement de T , ϕ et α , telle que

$$\int_{(F \setminus B(0, R)) \times [0, T]} P_{\mathcal{D}}(dx, dt) \leq \varepsilon,$$

ce qui implique la tension de la famille de mesures de probabilité $(P_{\mathcal{D}}(dx, dt))_{\mathcal{D} \in \mathcal{F}}$ sur $F \times [0, T]$, définie pour la famille \mathcal{F} de toutes les discrétisations \mathcal{D} vérifiant les hypothèses (HD) et telles que $\tau < 1$ et $h/\tau < 1$.

Lemme 16.7 (Tension de $\sigma_{\mathcal{D}}$). Sous les hypothèses (H) et (HD), et pour $T > \delta$, soit $(p_n^{(K)})_{n \in \mathbb{N}, K \in \mathcal{M}}$ l'unique solution au schéma défini par (53), (54), (55), (56), (57) et qui satisfait (59)-(60). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $R > 0$, dépendante uniquement de T et α , telle que

$$\int_{(\Gamma \setminus B(0,R)) \times [0,T]} \sigma_{\mathcal{D}}(dx, dt) \leq \varepsilon,$$

ce qui implique la tension de la famille de mesures de probabilité $(\sigma_{\mathcal{D}}(dx, dt))_{\mathcal{D} \in \mathcal{F}}$ sur $\Gamma \times [0, T]$, définie pour la famille \mathcal{F} de toutes les discrétisations \mathcal{D} vérifiant les hypothèses (HD) et telles que $\tau < 1$ et $h/\tau < 1$.

16.4 Analyse de convergence

Dans la démonstration de la convergence du schéma numérique, on a besoin de fonctions qui sont plus régulières que les éléments de l'espace des fonctions tests \mathcal{T} . Dans notre article [CTEGR17], on définit donc un nouvel espace $\mathcal{T}_r \subset \mathcal{T}$ qui approche correctement les éléments de \mathcal{T} tout en possédant plus de régularités. On peut alors obtenir la convergence des mesures approchées vers les mesures qui sont solution de l'équation (52).

Théorème 16.8. Sous les hypothèses (H) et (HD), et pour $T > \delta$, soit $(p_n^{(K)})_{n \in \mathbb{N}, K \in \mathcal{M}}$ l'unique solution au schéma défini par (53), (54), (55), (56), (57) et qui satisfait (59)-(60).

Si on suppose que $\delta \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, et $h/\tau \rightarrow 0$, alors la mesure approchée $P_{\mathcal{D}}(dx, dt)$ (respectivement $\sigma_{\mathcal{D}}(dx, dt)$) tend, pour la topologie faible des mesures, vers la mesure μ (respectivement σ) solution de l'équation (52).

De plus, on peut montrer que la mesure solution est absolument continue en temps par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ , puisqu'on peut extraire la mesure ρ_t sur \mathbb{R}^d de la mesure μ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

Théorème 16.9. Sous les hypothèses (H) et (HD), et pour $T > \delta$, soit $(p_n^{(K)})_{n \in \mathbb{N}, K \in \mathcal{M}}$ l'unique solution au schéma défini par (53), (54), (55), (56), (57) et qui satisfait (59)-(60).

Si on suppose que $\delta \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, et $h/\tau \rightarrow 0$, alors la mesure approchée $P_{\mathcal{D}}(t)dx$ (définie par (58)) tend, pour presque tout $t > 0$, pour la topologie faible des mesures, vers la mesure ρ_t solution de l'équation (51) (ou (52)).

16.5 Illustration numérique

Afin d'illustrer le fonctionnement du schéma numérique, on va détailler sa mise en œuvre sur quelques modèles en dimension $d = 1$. On s'intéresse au processus de la taille de la fenêtre (là où se trouvent les données de transmises) dans le Protocole de Contrôle de Transmission (TCP) décrit dans [DGR02]. La taille maximale de la fenêtre est notée $\gamma > 0$. L'évolution en temps de la taille de la fenêtre dans un réseau est modélisée par un PDMP. À des temps aléatoires le réseau est saturé, et le protocole impose une division par deux de la taille de la fenêtre. Deux modèles sont considérés : celui sans saut à la frontière (le modèle est noté "TCP") ou avec un saut à la frontière (le modèle est noté "TCP-B"). Dans ce cadre, l'espace d'état F est l'intervalle $(-\infty, \gamma)$. On considère que

le flot de données grossit à une vitesse constante renormalisée à 1, ce qui donne un flot $\phi(x, t) = \min(x + t, \gamma)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Dans les deux modèles, on ne peut dépasser la valeur γ , mais ce qui change c'est la présence d'un saut à la frontière ou pas. Le taux λ , qui caractérise les instants de sauts aléatoires, est défini par extension sur tout \mathbb{R} par $\lambda(x) = \min(\max(x, 0), \gamma)$. Ainsi, plus la taille de fenêtre est grande, plus le saut peut survenir suite à une congestion du réseau. La loi de probabilité $Q(x, dy)$ est alors la mesure de Dirac au point $\min(x, \gamma)/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans le modèle TCP-B, $\Gamma = \{\gamma\}$ et $\alpha(x) = \gamma - x$ pour tout $x \in F$ et $\alpha(x) = 0$ pour tout $x \in F^c$. Au point $\{\gamma\}$ le processus doit sauter avec probabilité p au point $\{\gamma/2\}$ et avec probabilité $1 - p$ uniformément sur $(0, \gamma)$. On définit donc

$$q(x, dy) = p \delta_{\gamma/2}(dy) + \frac{1-p}{\gamma} \chi_{(0,\gamma)}(y)dy,$$

avec les notations évidentes pour la mesure de Dirac au point $\gamma/2$ et la fonction indicatrice χ sur l'espace $(0, \gamma)$. Finalement, on se fixe une mesure de Dirac au point $\{0\}$ comme donnée initiale, ce qui représente le démarrage de la machine se connectant au réseau.

On a réalisé des simulations pour approcher numériquement les distributions marginales ρ_T , à l'instant $T = 10$. En effet, dans l'article [CMP10], les auteurs obtiennent des estimations quantitatives pour la convergence vers l'équilibre qui sont compatibles avec nos observations : à l'instant $T = 10$ on atteint un état numérique stable. D'autre part, une formule analytique pour la loi à l'équilibre a été obtenue dans le cas d'espace d'états avec $\gamma = +\infty$ dans [DGR02], ce qui permet de comparer nos résultats numériques lorsque γ est grand. On réalise notamment des tests pour les valeurs $\gamma = 2$ et $\gamma = 6$ pour le modèle TCP sans saut à la frontière, et $\gamma = 2$ pour le modèle TCP-B avec saut à la frontière avec une probabilité $p = 0.5$.

Afin d'illustrer la convergence lorsque $h, \tau, \delta \rightarrow 0$, on réalise les simulations numériques avec un paramètre $\delta = 0.01$ fixé, mais pour différentes valeurs de h et τ , et sur un maillage $\cup_{K \leq \gamma/h} [Kh - h, Kh]$. Remarquons enfin que, pour le modèle TCP sans saut à la frontière avec $\gamma = 2$, la loi de probabilité possède évidemment une mesure de Dirac au point γ car le flot s'y accumule et n'en sort que par des sauts aléatoires. On représente cette mesure de Dirac comme une flèche verticale dont la hauteur est la masse de probabilité en ce point. Lorsque $\gamma = 6$, la probabilité est évidemment bien plus faible, et on ne peut pas l'observer sur la figure 19. On remarque d'ailleurs que la loi de probabilité pour $\gamma = 6$ est très proche de la loi donnée par la formule analytique lorsque $\gamma = +\infty$.

Enfin, et seulement dans le cas $h = 0.01$, on réalise une simulation Monte-Carlo avec 10^4 trajectoires simulées afin d'illustrer la différence de convergence entre une loi de probabilité obtenue par un histogramme basé sur une simulation Monte-Carlo et notre schéma volumes finis. Un temps de calcul environ 60 fois plus important est nécessaire pour calculer cette approximation par trajectoires simulées par rapport à notre schéma volumes finis. Si on souhaite obtenir une reconstruction beaucoup plus lisse, cela nécessite environ 10^6 trajectoires. Dans les cas $h = 0.2$ et $h = 0.1$, 10^4 trajectoires sont largement suffisantes pour obtenir une densité lisse, mais le temps de calcul est alors approximativement 300 fois plus important par rapport à notre schéma volumes finis.

En conclusion de cette étude, nous pourrions préciser que les cas pratiques d'applications nécessitent des hypothèses plus générales que celles faites dans notre article avec

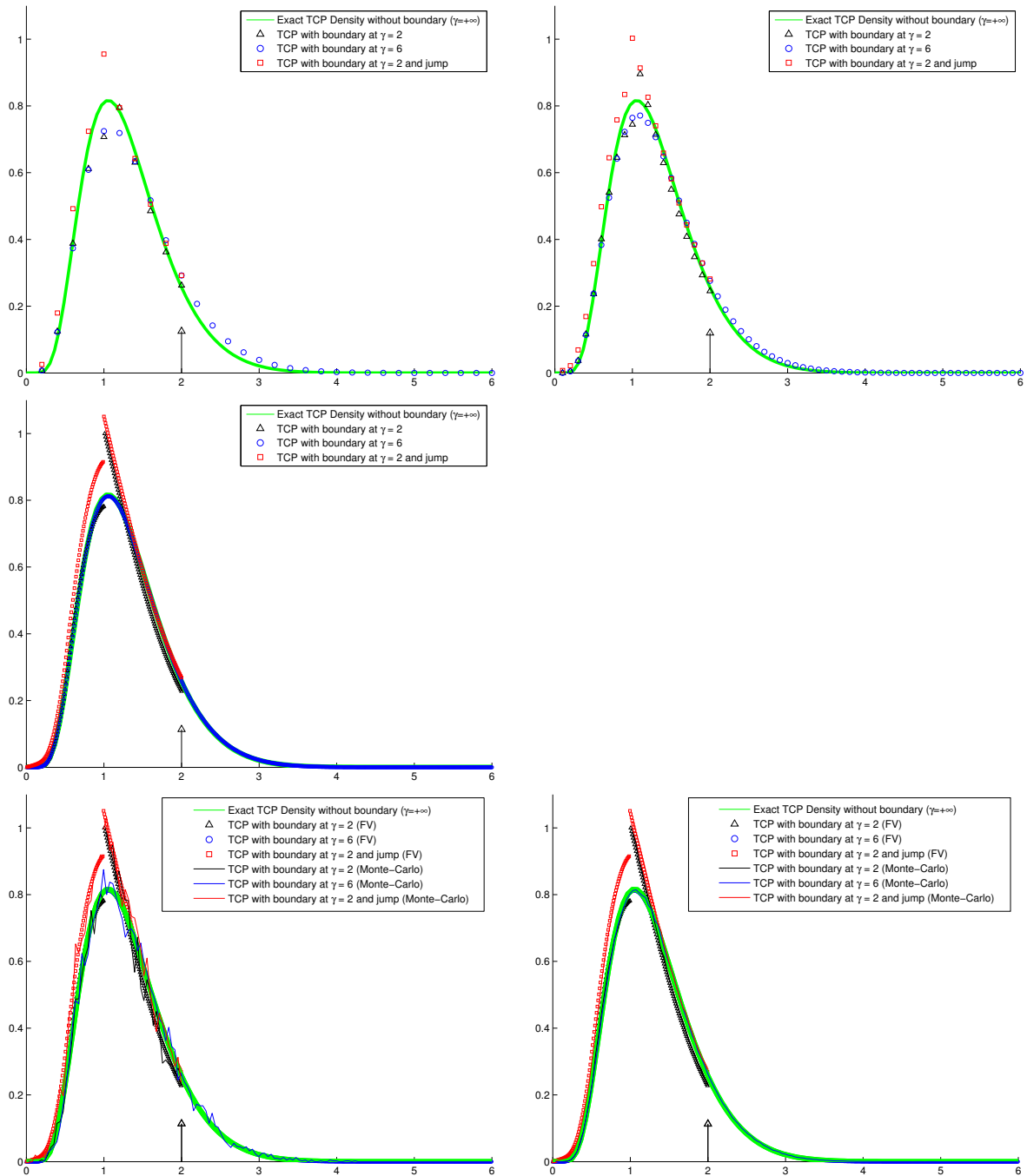


FIGURE 19 : Densités obtenues par le schéma volumes finis pour les paramètres (en haut à gauche) $h = \tau = 0.2$, (en haut à droite) $h = \tau = 0.1$, (milieu) $h = \tau = 0.01$ et (en bas) $h = \tau = 0.01$. Comparaison avec une simulation de type Monte-Carlo avec (en bas à gauche) 10^4 et (en bas à droite) 10^6 trajectoires simulées.

Christiane Cocozza-Thivent, Robert Eymard et Michel Roussignol. En réalité, il est possible de reprendre les démonstrations dans le cas où l'espace F est un espace hybride composé de plusieurs sous-espaces indexés par un ensemble d'indices, et où la fonction α peut prendre des valeurs infinies sur certains sous-espaces. De plus, certaines formes d'hypothèses, comme par exemple (H.5c), semblent trop restrictives, puisqu'on s'attend à ce que le processus se situe loin de la frontière après un saut. Le cas où le processus serait autorisé à sauter sur la frontière est un problème ouvert, mais sinon il doit être possible de reprendre les démonstrations pour généraliser la convergence à une plus grande classe de PDMP. Toutefois, nous avons décidé de conserver des hypothèses moins générales afin de détailler les idées de la démonstration, plutôt que de se focaliser sur des détails techniques. D'autant plus que le schéma volumes finis semble efficace dans bien plus de cas pratiques. En particulier, il sur-performe les méthodes de Monte-Carlo dans la reconstruction des lois de probabilités, notamment lorsque δt est grand, puisqu'il permet d'approcher les états stationnaires asymptotiques d'un PDMP.

17 Projets et perspectives

Dans cette dernière partie de mon mémoire, j'ai rappelé les différents résultats obtenus en analyse numérique dans des cadres d'applications très divers que sont la biologie, la finance, l'assurance ou la fiabilité. J'espère avoir montré que le travail du mathématicien appliqué est riche d'interactions entre différents domaines d'applications et même entre différentes thématiques mathématiques. Ces interactions ont permis de mettre au point des preuves de convergence de modèles stochastiques de type Wright-Fisher, des calculs de répliquations et d'optimalité de paramètres pour les produits CPPI, des preuves d'existence de solutions à des équations singulières de transport avec frontière dans le cadre des PDMP. À chaque fois c'est la méthode numérique qui a fourni les éléments de preuves.

C'est d'autant plus frappant dans le cas de la dynamique de Wright-Fisher en population grande en présence de sélection indirecte. En effet, l'équation limite (34) pourrait difficilement être devinée en considérant le modèle de tirage de boules dans l'urne. Par contre, elle apparaît naturellement dans la formule de récurrence (33) pour le praticien habitué aux schémas numériques.

Dans le cas des PDMP, je me souviens très bien de ce moment, ou dans le modèle le plus simple, tous les avis de l'équipe divergeaient quand au sens et à la forme des équations limites. Même la présence de la mesure σ semblait contradictoire à bien des égards. C'est finalement l'implémentation de plusieurs variantes d'algorithmes qui imposa l'introduction d'un paramètre τ en plus du paramètre δ . De même la définition 16.2 découle de l'approximation du terme $\partial_{t,\phi}g$ par des flux

$$v_{KL} = \frac{1}{\tau} |\{x \in K : \alpha(x) > \tau \text{ and } \phi(x, \tau) \in L\}|.$$

qui couplent à la fois les frontières et le flot. Les espaces de fonctions tests devaient donc contenir les informations inhérentes aux frontières et au flot de manière agrégée. Une fois l'espace des fonctions tests fixé à l'aide de la formulation volumes finis, la convergence du schéma imposa la forme des équations limites. Et la mesure σ s'est imposée, tout comme l'écriture de la mesure μ comme un produit $\rho_t(dx)dt$.

Modèles de Wright-Fisher

Les principales retenues qu'on pourrait émettre face à ces résultats concernent la non-uniformité des résultats en fonction des paramètres y_0 et s . En effet cela simplifierait certainement les démonstrations. De plus dans le cas $s \geq 1$, on ne peut prouver la convergence vers la diffusion limite que jusqu'au moment où le processus atteint la valeur $x = 1 - y_0$, et on ne peut donc pas caractériser le comportement à la frontière $x = 1$. Notamment il n'est pas possible de démontrer que le processus continu permet une approximation des probabilités d'absorption à la frontière et des temps moyen d'absorption, ce qui est pourtant l'application désirée. Dans cette direction, j'envisage de reprendre la démonstration afin de comprendre les comportement à la frontière $x = 1$. Il semble possible d'étudier la diffusion limite au moyen des techniques de réflexion pour les équations différentielles stochastiques. Cela nous indiquerait si la frontière absorbe le processus, réfléchit la dynamique, ou même si le processus n'atteint jamais la dynamique. De cette caractérisation, on déduirait le comportement discret attendu pour la chaîne de Markov ce qui donnerait

des idées de contrôle pour montrer la convergence uniforme. On pourrait également modifier le modèle discret de tirage pour forcer un comportement limite à la frontière. Ces résultats sont évidemment de première importance pour les applications et un dictionnaire complet sur la caractérisation des modèles discrets et leur approximation en grande population fournirait un atout formidable pour les biologistes.

Les simulations numériques de ces modèles ont été réalisées par mon étudiant Adrian Jarret, et il apparaît que des dynamiques non triviales semblent émerger. Notamment l'existence de points d'équilibres en fonction du choix des paramètres β et s . Car la dérive peut posséder plusieurs points d'annulation. L'étude mathématique de l'existence de points d'équilibre et de bifurcations pour les dynamiques de diffusion limite est une autre piste de recherche envisageable. Cela expliquerait en particulier pourquoi ces comportements malveillants subsistent dans la nature en dépit de l'intuition, et du caractère délétère sur l'ensemble de la population des mâles malveillants.

Modèles de “variable annuités”

Il ressort de mon étude des “variable annuités” que de nombreux résultats mathématiques sont encore à démontrer. Il serait difficile de tous les citer tellement le sujet est vaste. Mais mon premier regret se situe envers les méthodes en Fourier-Cosine. Cela fait plusieurs années que je tente avec Xiao Wei de mettre au point des formules d'évaluation efficaces, mais ces méthodes semblent particulièrement mal réagir aux maturités longues. En effet, l'impossibilité de caractériser complètement les vitesses de convergence de l'approximation en Fourier-Cosine (dont on attend pourtant des vitesses de convergences élevées démontrées dans les cas simples) ne permet pas de comprendre comment choisir les tailles des bases d'approximation. Je félicite mes étudiantes Mengjie Zhang, Meng Du et Ying Zhou qui tentèrent d'étendre les méthodes de Fourier-Cosine à des modèles de “variables annuités” particuliers, et parfois avec succès, même si aucun schéma global émergent ne semble avoir pour le moment notre préférence. J'aimerais me concentrer davantage sur cette méthode à l'avenir car elle fournirait une méthode supplémentaire à la liste actuelle de méthodes efficaces.

L'écriture d'une méthode ADI pour le modèle complet Black-Scholes-Hull-White-Heston dans le cas des “variable annuités” est un projet dont les détails mathématiques sont encore à développer. La méthode numérique que j'ai développée fonctionne, mais les temps de calculs sont relativement élevés et ceci pour plusieurs raisons. Premièrement la caractérisation des termes de bord est bien trop élémentaire dans l'équation (47), certes la solution est unique, mais elle ne satisfait pas des conditions limites adaptées au cas réaliste. L'étude asymptotique des solutions en domaines bornés devraient permettre d'améliorer les conditions limites implémentées dans les schémas numériques. Mais il faudrait écrire les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions pour ces conditions, ce qui passe certainement par des théorèmes de relèvement des conditions de Neumann homogènes. L'équation vérifiée par la solution non relevée serait bien plus stable et simple à implémenter. De plus, et c'est le sujet de la deuxième raison qui expliquerait des temps de calculs élevés, cela indiquerait comment reconstruire les solutions aux dates t_i . En effet, ce sont des méthodes d'interpolations linéaires qui sont habituellement mises en place à cette étape. Comme Andrea Molent l'a découvert, des méthodes d'interpolations

locales sur des bases différentes semblent modifier complètement les vitesses de convergence des méthodes numériques. Sans cette amélioration, les schémas numériques sont très instables. On le comprend bien puisqu'on risque de reconstruire numériquement des solutions non-consistantes avec les solutions continues.

Une direction de recherche relativement aisée consiste à montrer l'unicité globale du paramètre α_g . Aucun résultat en ce sens n'est disponible dans la littérature, il s'agit pourtant d'une notion de consistance élémentaire d'un point de vue pratique. Une réponse négative irait à l'encontre de la consistance du marché. De même la régularité des solutions en fonction du choix des fonctions \mathcal{F} de reconstruction aux dates t_i dans l'équation (47) est un champ d'investigation ouvert. Les propriétés de continuité en espace semblent facilement atteignables, car on s'attend fortement à ce qu'il n'existe pas de sauts dans les solutions, au moins dans le cas statique. Pourtant, dans le cas dynamique, certains contrats accordent des bonus lorsque l'investisseur décide de ne pas faire de retrait. C'est la zone bleue dans la figure 18. Dans cette zone, le compte B passe de la valeur b à la valeur $b(1 + k_i)$ où k_i est le bonus accordé à la date t_i . Pourtant la solution $u(t, a, b)$ reste bien continue à la frontière de la zone bleue. Les mêmes problèmes surgissent pour la zone rouge, où empiriquement la stratégie γ_i passe brutalement de la valeur 1 à 2, mais la solution reste continue. Une régularité \mathcal{C}^1 (bien plus complexe, et bien moins sûre) serait également un avantage pour quantifier le nombre d'itérations nécessaires pour la méthode de la sécante, mais une régularité Lipschitzienne pourrait s'avérer suffisante.

D'un point de vue numérique et algorithmique, l'extension des méthodes sur des architectures OpenMP et MPI est bien sûre envisagée. Mon étudiant Ariel Lanza a déjà défriché cette piste de recherche. Et bien qu'il ait aujourd'hui terminé son stage, j'espère qu'il pourra se pencher sur ce problème à l'avenir. Nous réfléchissons justement à implémenter ces méthodes sur le mésocentre de CentraleSupélec. Je tente également d'étendre les méthodes à des produits financiers plus complexes de type "Credit Valuation Adjustment" (CVA) ou "Debit Valuation Adjustment" (DVA). Cela a été esquissé dans mon travail en cours avec Andrea Molent et Antonino Zanette (voir le preprint [P5]).

Je cite également une piste de recherche sur les modèles de marchés. Il semble à première vue que l'extension au modèle de Bates de ces produits semble possible. Ce modèle couple le modèle d'Heston et celui de Merton. Mais l'équation aux dérivées partielles devient une équation intégro-différentielle pour laquelle les résultats théoriques sont moins présents dans la littérature, même dans les cadres simples. La non-localité des opérateurs pourrait drastiquement perturber les optimisations locales faite par les valeurs γ_i . Toutefois, au moins dans le cas statique, l'extension semble relativement aisée.

PDMP avec diffusion

Je travaille toujours avec Christiane Coccozza-Thivent sur l'élaboration de formules plus génériques pour les PDMP et leur approximation par des schémas en volumes finis. Notamment l'hypothèse (H.5c) qui semble relativement technique, mais pas forcément optimale.

Une autre piste de recherche très actuelle concerne les processus de Markov déterministes par morceaux avec diffusion. Dans ce cas, le transport est couplé à une partie diffusive, on peut également voir le PDMP comme un transport dans un espace de dimension infinie. Je pense que la généralisation est possible car les algorithmes de la section 16

sont indépendants de la dimension. Les difficultés apparaissent certainement dans les espaces de fonctions tests, mais si on possède des espaces de solutions réguliers en la variable d'espace pour le transport en dimension infinie, on doit pouvoir adapter la définition 16.2.

L'autre direction de recherche concerne bien évidemment une caractéristique ayant émergée du schéma en volumes finis. Le lecteur attentif aura remarqué que la convergence n'impose aucune condition sur la taille de δt par rapport au paramètre h , contrairement au paramètre τ qui doit être plus grand. C'est en rupture complète avec [BEP11], et cela comble un inconvénient majeur de [CTEM06]. Tout comme dans [EM08], on peut désormais utiliser des pas de temps δt grand pour étudier les comportements asymptotiques. On pourrait ainsi échantillonner les mesures invariantes, ce qui fournirait un avancée majeure dans ce domaine. En effet les méthodes classiques de simulations de type Monte-Carlo sont rapidement inefficaces en temps long, et pourtant, dans un cadre d'applications, on ne cherche pas à estimer des quantités transitoires, mais bien des quantités asymptotiques, et donc dépendantes de la loi invariante.

Index

- Adaptive Multilevel Splitting, 58
- algorithme, 11, 15, 16, 37, 59, 60, 67, 71, 72
- algorithme d'approximation, 44
- algorithme déterministe, 37, 75, 76
- algorithme de splitting, 59
- algorithme numérique, 16, 37, 41, 43, 48, 49, 60, 75
- algorithme stochastique, 37, 39
- Allen-Cahn, 45
- AMS, 58, 59, 66, 67
- AMS généralisé, 58, 61
- assurance, 93

- CPPI, 98

- diffusion limite, 90

- évènements rares, 58

- finance, 93
- finite difference, 79, 82
- finite volume, 79

- génétique, 82
- GAMS, 58, 61
- GLWB, 103
- GMWB, 103

- méthode numérique, 107
- modèles en finance et assurance, 93
- Monte-Carlo multi-niveaux, 54
- multi-génération, 87

- ordre faible, 40
- ordre fort, 40

- PDMP, 115
- populations, 82
- portefeuilles d'assurance, 98
- Processus de Markov déterministes par morceaux, 115
- proportion constante, 98

- sélection, 87
- sélection indirecte, 88

- schéma numérique, 53, 115, 125
- Wright-Fisher, 82

Références

- [AB01] S. K. Au and J. L. Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Journal of Probabilistic Engineering Mechanics*, 16 :263–277, 2001.
- [AC79] S. Allen and J. Cahn. A macroscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metal. Mater.*, 27(6) :1085–1095, 1979.
- [ACZ15] Elisa Appolloni, Lucia Caramellino, and Antonino Zanette. A robust tree method for pricing american options with the Cox-Ingersoll-Ross interest rate model. *IMA Journal of Management Mathematics*, 26(4) :377–401, 2015.
- [AG07] S. Asmussen and P.W. Glynn. *Stochastic simulation : algorithms and analysis*, volume 57 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, New York, 2007.
- [Ain04] Mark Ainsworth. Discrete dispersion relation for *hp*-version finite element approximation at high wave number. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2) :553–575 (electronic), 2004.
- [AL16] Adam Andersson and Stig Larsson. Weak convergence for a spatial approximation of the nonlinear stochastic heat equation. *Math. Comp.*, 85(299) :1335–1358, 2016.
- [Alf10] Aurélien Alfonsi. High order discretization schemes for the CIR process : application to Affine Term Structure and Heston models. *Mathematics of Computation*, 79(269) :209–237, 2010.
- [ALMT15] D. Aristoff, Tony Lelièvre, C.G. Mayne, and I. Teo. Adaptive multilevel splitting in molecular dynamics simulations. *ESAIM Proceedings and Surveys*, 48, 2015.
- [AP09] Y. Achdou and O. Pironneau. Mathematical modelling and numerical methods in finance. *Handbook of Numerical Analysis*, 15, 2009.
- [Bar12] F. Barret. Sharp asymptotics of metastable transition times for one dimensional SPDEs. *arXiv :1201.4440*, 2012.
- [BBM14] H. Bessaih, Z. Brzeźniak, and A. Millet. Splitting up method for the 2D stochastic Navier-Stokes equations. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.*, 2(4) :433–470, 2014.
- [BCZ15] Maya Briani, Lucia Caramellino, and Antonino Zanette. A hybrid approach for the implementation of the heston model. *IMA Journal of Management Mathematics*, 2015.

- [BCZ17] M. Briani, L. Caramellino, and A. Zanette. A hybrid tree/finite-difference approach for heston-hull-white type models. *Journal of Computational Finance*, 21(3), 2017.
- [BD17] Charles-Edouard Bréhier and Arnaud Debussche. Kolmogorov equations and weak order analysis for SPDEs with nonlinear diffusion coefficient. *arXiv preprint arXiv :1703.01095*, 2017.
- [BE91] J. F. Blowey and C. M. Elliott. The Cahn-Hilliard gradient theory for phase separation with nonsmooth free energy. I. Mathematical analysis. *European J. Appl. Math.*, 2(3) :233–280, 1991.
- [BEP11] F. Bouchut, R. Eymard, and A. Prignet. Finite volume schemes for the approximation via characteristics of linear convection equations with irregular data. *Journal of Evolution Equations*, 11(3) :2011, 2011.
- [BF93] Peter W. Bates and Paul C. Fife. The dynamics of nucleation for the Cahn-Hilliard equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 53(4) :990–1008, 1993.
- [BFL09] A. C. Belanger, P. A. Forsyth, and G. Labahn. Valuing the guaranteed minimum death benefit clause with partial withdrawals. *Applied Mathematical Finance*, 16(6) :451–496, 2009.
- [BG13] N. Berglund and B. Gentz. Sharp estimates for metastable lifetimes in parabolic SPDEs : Kramers’ law and beyond. *Electronic Journal of Probability*, 18(24) :58, 2013.
- [BG18a] Charles-Edouard Bréhier and Ludovic Goudenège. Analysis of some splitting schemes for the stochastic Allen-Cahn equation. *arXiv preprint arXiv :1801.06455*, 2018.
- [BG18b] Charles-Edouard Bréhier and Ludovic Goudenège. Weak convergence rates of splitting schemes for the stochastic allen-cahn equation. *arXiv preprint arXiv :1804.04061*, 2018.
- [BGG⁺15] Charles-Edouard Bréhier, Maxime Gazeau, Ludovic Goudenège, Mathias Rousset, and Tony Lelièvre. Unbiasedness of some generalized adaptive multilevel splitting algorithms. *arXiv preprint arXiv :1505.02674*, 2015.
- [BGG⁺16] Charles-Edouard Bréhier, Maxime Gazeau, Ludovic Goudenège, Tony Lelièvre, and Mathias Rousset. Unbiasedness of some generalized adaptive multilevel splitting algorithms. *Ann. Appl. Probab.*, 26(6) :3559–3601, 2016.
- [BGGR15] Charles-Edouard Bréhier, Maxime Gazeau, Ludovic Goudenège, and Mathias Rousset. Analysis and simulation of rare events for SPDEs. In *CEM-RACS 2013—modelling and simulation of complex systems : stochastic and deterministic approaches*, volume 48 of *ESAIM Proc. Surveys*, pages 364–384. EDP Sci., Les Ulis, 2015.

- [BGJK17] Sebastian Becker, Benjamin Gess, Arnulf Jentzen, and Peter E Kloeden. Strong convergence rates for explicit space-time discrete numerical approximations of stochastic Allen-Cahn equations. *arXiv preprint arXiv :1711.02423*, 2017.
- [BGL06] J. Blanchet, P. Glynn, and J. C. Liu. State-dependent importance sampling and large deviations. In *Proceedings of the 1st international conference on Performance evaluation methodolgies and tools, valuetools '06*, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [BGT16] Charles-Edouard Bréhier, Ludovic Goudenège, and Loïc Tudela. Central Limit Theorem for Adaptive Multilevel Splitting Estimators in an Idealized Setting. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 163 :245–260, June 2016.
- [BJ87] F. Black and R. Jones. Simplifying portfolio insurance. *Journal of Portfolio Management*, 14(1) :48–51, 1987.
- [BK16] Carole Bernard and Minsuk Kwak. Semi-static hedging of variable annuities. *Insurance : Mathematics and Economics*, 67 :173 – 186, 2016.
- [BKR08] Daniel Bauer, Alexander Kling, and Jochen Russ. Universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities. *ASTIN Bulletin*, 38 :621–651, 2008.
- [BLR15] C.-E. Bréhier, T. Lelièvre, and M. Rousset. Analysis of adaptive multi-level splitting algorithms in an idealized setting. *ESAIM Probability and Statistics*, to appear, 2015.
- [BMOP11] Anna Rita Bacinello, Pietro Millosovich, Annamaria Olivieri, and Ermanno Pitacco. Variable annuities : A unifying valuation approach. *Insurance : Mathematics and Economics*, 49(3) :285 – 297, 2011.
- [BMPW01] Dirk Blömker, Stanislaus Maier-Paape, and Thomas Wanner. Spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard-Cook equation. *Communications in Mathematical Physics*, 223(3) :553–582, 2001.
- [BMPW05] Dirk Blömker, Stanislaus Maier-Paape, and Thomas Wanner. Phase separation in stochastic Cahn-Hilliard models. *Nova Science Publishers, Mathematical Methods and Models in Phase Transitions* :1–41, 2005.
- [BMPW08] Dirk Blömker, Stanislaus Maier-Paape, and Thomas Wanner. Second phase spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard-Cook equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(1) :449–489 (electronic), 2008.
- [BNDMV07] V. Bonnaillie-Noël, M. Dauge, D. Martin, and G. Vial. Computations of the first eigenpairs for the Schrödinger operator with magnetic field. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(37-40) :3841–3858, 2007.

- [Bov09] A. Bovier. Metastability. *In Methods of contemporary mathematical statistical physics*, 1970 :177–221, 2009.
- [Bré15] Charles-Edouard Bréhier. Large deviations principle for the adaptive multilevel splitting algorithm in an idealized setting. *arXiv preprint arXiv :1502.06780*, 2015.
- [Bré17] Charles-Edouard Bréhier. Influence of the regularity of the test functions for weak convergence in numerical discretization of SPDEs. *arXiv preprint arXiv :1709.09370*, 2017.
- [BS09] Freddy Bouchet and Eric Simonnet. Random changes of flow topology in two-dimensional and geophysical turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 102(094504), March 2009.
- [BSK81] I. Babuška, B. A. Szabo, and I. N. Katz. The p -version of the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(3) :515–545, 1981.
- [Buc04] J.A. Bucklew. *Introduction to rare event simulation*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [Cah61] John W. Cahn. On spinodal decomposition. *Acta Metallurgica*, 9(9) :795–801, September 1961.
- [CDMFG12] F. Cérou, P. Del Moral, T. Furon, and A. Guyader. Sequential Monte Carlo for rare event estimation. *Stat. Comput.*, 22(3) :795–808, 2012.
- [CDMLL06] F. Cérou, P. Del Moral, F. LeGland, and P. Lezaud. Genetic genealogical models in rare event analysis. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 1 :181–203, 2006.
- [Cer01] Sandra Cerrai. *Second order PDE's in finite and infinite dimension*, volume 1762 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. A probabilistic approach.
- [CF07] Z. Chen and P. A. Forsyth. A numerical scheme for the impulse control formulation for pricing variable annuities with a guaranteed minimum withdrawal benefit (gmwb). *Numerische Mathematik*, 109 :535–569, 2007.
- [CFM06] N. Champagnat, R. Ferriere, and S. Meleard. Unifying evolutionary dynamics : from individual stochastic processes to macroscopic models. *Theor Popul Biol*, 69(3) :297–321, May 2006.
- [CFM08] Nicolas Champagnat, Régis Ferrière, and Sylvie Méléard. From individual stochastic processes to macroscopic models in adaptive evolution. *Stoch. Models*, 24(suppl. 1) :2–44, 2008.
- [CG07] F. Cérou and A. Guyader. Adaptive multilevel splitting for rare event analysis. *Stoch. Anal. Appl.*, 25(2) :417–443, 2007.

- [CG14] F. Cérou and A. Guyader. Fluctuations of adaptive multilevel splitting. *arXiv preprint arXiv :1408.6366*, 2014.
- [CGLM13] Frédéric Cérou, Arnaud Guyader, Tony Lelièvre, and Florent Malrieu. On the length of one-dimensional reactive paths. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 10(1) :359–389, 2013.
- [CGLP11] F. Cérou, A. Guyader, T. Lelièvre, and D. Pommier. A multiple replica approach to simulate reactive trajectories. *Journal of Chemical Physics*, 134(5), 2011.
- [CGMZT14] V. Caron, A. Guyader, M. Munoz Zuniga, and B. Tuffin. Some recent results in rare event estimation. In *Journées MAS 2012*, volume 44 of *ESAIM Proc.*, pages 239–259. EDP Sci., Les Ulis, 2014.
- [CH58] John W. Cahn and John E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy. *Journal of Chemical Physics*, 28(2) :258, February 1958.
- [CH71] John W. Cahn and John E. Hilliard. Spinodal decomposition : a reprise. *Acta Metallurgica*, 19(2) :151–161, February 1971.
- [CJK14] D. Conus, A. Jentzen, and R. Kurniawan. Weak convergence rates of spectral galerkin approximations for spdes with nonlinear diffusion coefficients. *arXiv preprint arXiv :1408.1108*, 2014.
- [CM97] F. Chenal and Annie Millet. Uniform large deviations for parabolic SPDEs and applications. *Stochastic Processes and their Applications*, 72(2) :161–186, 1997.
- [CMP10] D. Chafaï, F. Malrieu, and K. Paroux. On the long time behavior of the tcp window size process. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(8) :1518–1534, 2010.
- [Coo70] H. Cook. Brownian motion in spinodal decomposition. *Acta Metallurgica*, 18 :297–306, 1970.
- [Cor12] M. Corvellec. *Transitions de phase en turbulence bidimensionnelle et géophysique*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, 2012.
- [CS09] Fabio A. C. C. Chalub and Max O. Souza. A non-standard evolution problem arising in population genetics. *Commun. Math. Sci.*, 7(2) :489–502, 2009.
- [CS14] Fabio A. C. C. Chalub and Max O. Souza. The frequency-dependent Wright-Fisher model : diffusive and non-diffusive approximations. *J. Math. Biol.*, 68(5) :1089–1133, 2014.
- [CT13] C. Coccozza-Thivent. *Renouvellement markovien et PDMP*. online, 2013.

- [CTE04] C. Coccozza-Thivent and R. Eymard. Approximation of the marginal distributions of a semi-markov process using a finite volume scheme. *ESAIM : M2AN*, 38(5) :853–875, 2004.
- [CTEGR17] Christiane Coccozza-Thivent, Robert Eymard, Ludovic Goudenège, and Michel Roussignol. Numerical methods for piecewise deterministic Markov processes with boundary. *IMA J. Numer. Anal.*, 37(1) :170–208, 2017.
- [CTEM06] C. Coccozza-Thivent, R. Eymard, and S. Mercier. A finite volume scheme for dynamic reliability models. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 6 :2006, Mars 2006.
- [CTEMR06] C. Coccozza-Thivent, R. Eymard, S. Mercier, and M. Roussignol. Characterization of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006(92156) :1–18, 2006.
- [CVF08] Z. Chen, K. Vetzal, and P.A. Forsyth. The effect of modelling parameters on the value of GMWB guarantees. *Insurance : Mathematics and Economics*, 43(1) :165 – 173, 2008.
- [CW01] Caroline Cardon-Weber. Cahn-Hilliard stochastic equation : existence of the solution and of its density. *Bernoulli*, 7(5) :777–816, 2001.
- [CW02] Caroline Cardon-Weber. Cahn-Hilliard stochastic equation : strict positivity of the density. *Stoch. Stoch. Rep.*, 72(3-4) :191–227, 2002.
- [Dav93] M. H. A. Davis. *Markov Models and Optimization*. Chapman & Hall, London, 1993.
- [DB06] David Damiens and Guy Boivin. Why do sperm-depleted parasitoid males continue to mate? *Behavioral Ecology*, 17(1) :138–143, January 2006.
- [DCSP97] Y. Dutuit, E. Châtelet, J. P. Signoret, and Thomas P. Dependability modelling and evaluation by using stochastic petri nets : application to two test cases. *Reliability Engineering & System Safety*, 55(2) :117–124, 1997.
- [DD95] Arnaud Debussche and Lucia Dettori. On the Cahn-Hilliard equation with a logarithmic free energy. *Nonlinear Anal.*, 24(10) :1491–1514, 1995.
- [DD09] T. Dean and P. Dupuis. Splitting for rare event simulation : a large deviation approach to design and analysis. *Stochastic Process. Appl.*, 119(2) :562–587, 2009.
- [Deb11] Arnaud Debussche. Weak approximation of stochastic partial differential equations : the nonlinear case. *Math. Comp.*, 80(273) :89–117, 2011.
- [Den83] I. V. Denisov. Random walk and the Wiener process considered from a maximum point. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 28(4) :785–788, 1983.

- [DG01] A. M. Davie and J. G. Gaines. Convergence of numerical schemes for the solution of parabolic stochastic partial differential equations. *Math. Comp.*, 70(233) :121–134, 2001.
- [DG11] Arnaud Debussche and Ludovic Goudenège. Stochastic Cahn-Hilliard equation with double singular nonlinearities and two reflections. *SIAM J. Math. Anal.*, 43(3) :1473–1494, 2011.
- [DGR02] V. Dumas, F. Guillemin, and Ph. Robert. A Markovian analysis of additive-increase multiplicative-decrease (aimd) algorithms. *Adv. in Appl. Probab.*, 34(1) :85–111, 2002.
- [Dio07] Francisco Dionisio. Selfish and spiteful behaviour through parasites and pathogens. *Evol. Ecol. Res.*, 9(7) :1199–1210, November 2007.
- [DJR12] Ryan Francis Donnelly, Sebastian Jaimungal, and Dmitri Rubisov. Valuing gwbs with stochastic interest rates and volatility. *Quantitative Finance*, 2012.
- [DKZ08] M. Dai, Y. Kuen Kwok, and J. Zong. Guaranteed minimum withdrawal benefit in variable annuities. *Mathematical Finance*, 18 :595–611, 2008.
- [DLN01] Nicolas Dirr, Stephan Luckhaus, and Matteo Novaga. A stochastic selection principle in case of fattening for curvature flow. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 13(4) :405–425, 2001.
- [DM04] P. Del Moral. *Feynman-Kac Formulae*. Springer, 2004.
- [DMDJ06] P. Del Moral, A. Doucet, and A. Jasra. Sequential Monte Carlo samplers. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 68(3) :411–436, 2006.
- [DMG05] P. Del Moral and J. Garnier. Genealogical particle analysis of rare events. *Ann. Appl. Probab.*, 15(4) :2496–2534, 2005.
- [DMZ06] Robert C. Dalang, C. Mueller, and L. Zambotti. Hitting properties of parabolic s.p.d.e.’s with reflection. *Ann. Probab.*, 34(4) :1423–1450, 2006.
- [DPD96] Giuseppe Da Prato and Arnaud Debussche. Stochastic Cahn-Hilliard equation. *Nonlinear Anal.*, 26(2) :241–263, 1996.
- [DPDG02] Giuseppe Da Prato, Arnaud Debussche, and Benjamin Goldys. Some properties of invariant measures of non symmetric dissipative stochastic systems. *Probab. Theory Related Fields*, 123(3) :355–380, 2002.
- [DPZ92] Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

- [DPZ96] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Ergodicity for infinite-dimensional systems*, volume 229 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [DPZ02] Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. *Second order partial differential equations in Hilbert spaces*, volume 293 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [DPZ14] Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*, volume 152 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2014.
- [Dur96] Richard Durrett. *Stochastic calculus : a practical introduction*. Probability and Stochastics Series. CRC PressINC, 1996.
- [Dur08] Richard Durrett. *Probability models for DNA sequence evolution*. Probability and its Applications (New York). Springer, New York, second edition, 2008.
- [DW04] P. Dupuis and H. Wang. Importance sampling, large deviations, and differential games. *Stoch. Stoch. Rep.*, 76(6) :481–508, 2004.
- [DZ07] Arnaud Debussche and Lorenzo Zambotti. Conservative stochastic Cahn-Hilliard equation with reflection. *Ann. Probab.*, 35(5) :1706–1739, 2007.
- [EK86] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.
- [EL92] Charles M. Elliott and Stig Larsson. Error estimates with smooth and nonsmooth data for a finite element method for the cahn-hilliard equation. *Math. Comp.*, 58 :603–630, 1992.
- [EM91] N. Elezović and A. Mikelić. On the stochastic Cahn-Hilliard equation. *Non-linear Anal.*, 16(12) :1169–1200, 1991.
- [EM08] R. Eymard and S. Mercier. Comparison of numerical methods for the assessment of production availability of a hybrid system. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(1) :169–178, 2008.
- [EMP08] R. Eymard, S. Mercier, and A. Prignet. An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 222(2) :293–323, 2008.
- [EMR11] R. Eymard, S. Mercier, and M. Roussignol. Importance and sensitivity analysis in dynamic reliability. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 13(1) :75–104, 2011.

- [ESS92] L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Phase transitions and generalized motion by mean curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(9) :1097–1123, 1992.
- [Eth11] Alison Etheridge. *Some mathematical models from population genetics*, volume 2012 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011. Lectures from the 39th Probability Summer School held in Saint-Flour, 2009.
- [Ewe04] Warren J. Ewens. *Mathematical population genetics. I*, volume 27 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004. Theoretical introduction.
- [FBG16] B. Fernandez, N. Berglund, and B. Gentz. Metastability in interacting nonlinear stochastic differential equations i : From weak coupling to synchronisation. *ArXiv Mathematics e-prints*, November 2016.
- [FO01] Tadahisa Funaki and Stefano Olla. Fluctuations for $\nabla\phi$ interface model on a wall. *Stochastic Process. Appl.*, 94(1) :1–27, 2001.
- [FÖT94] Masatoshi Fukushima, Yōichi Ōshima, and Masayoshi Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, volume 19 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [Fun95] Tadahisa Funaki. The scaling limit for a stochastic PDE and the separation of phases. *Probab. Theory Related Fields*, 102(2) :221–288, 1995.
- [Fun99] Tadahisa Funaki. Singular limit for stochastic reaction-diffusion equation and generation of random interfaces. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 15(3) :407–438, 1999.
- [FW98] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell. *Random perturbations of dynamical systems*, volume 260 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998. Translated from the 1979 Russian original by Joseph Szücs.
- [FWR01] K. R. Foster, T. Wenseleers, and F. L. W. Ratnieks. Spite : Hamilton’s unproven theory. *Annales Zoologici Fennici*, 38(3-4) :229–238, 2001.
- [GHML11] A. Guyader, N. Hengartner, and E. Matzner-Løber. Simulation and estimation of extreme quantiles and extreme probabilities. *Appl. Math. Optim.*, 64(2) :171–196, 2011.
- [GHSZ98] P. Glasserman, P. Heidelberger, P. Shahabuddin, and T. Zajic. A large deviations perspective on the efficiency of multilevel splitting. *IEEE Trans. Automat. Control*, 43(12) :1666–1679, 1998.
- [GHSZ99] P. Glasserman, P. Heidelberger, P. Shahabuddin, and T. Zajic. Multilevel splitting for estimating rare event probabilities. *Oper. Res.*, 47(4) :585–600, 1999.

- [Gil74] J. H. Gillespie. Natural selection for within-generation variance in offspring number. *Genetics*, 76(3) :601–606, Mar 1974.
- [Gil75] J. H. Gillespie. Natural selection for within-generation variance in offspring number II. Discrete haploid models. *Genetics*, 81(2) :403–413, Oct 1975.
- [GK96] István Gyöngy and Nicolai Krylov. Existence of strong solutions for Itô’s stochastic equations via approximations. *Probab. Theory Related Fields*, 105(2) :143–158, 1996.
- [GKM14] Ludovic Goudenège, Aymeric Kalife, and Saad Mouti. Managing gap risks in iCPPI for life insurance companies : a risk/return/cost analysis. *Insurance Markets and Companies : Analyses and Actuarial Computations*, 5(2), 2014.
- [GKvO02] M.J.J. Garvels, D.P. Kroese, and J.C.W. van Ommeren. On the importance function in splitting simulation. *European Transactions on Telecommunications*, 13(4) :363–371, 2002.
- [GL11] Patrice Gaillardetz and Joe Youssef Lakhmiri. A new premium principle for equity-indexed annuities. *Journal of Risk and Insurance*, 78(1) :245–265, 2011.
- [GM05] István Gyöngy and Annie Millet. On discretization schemes for stochastic evolution equations. *Potential Anal.*, 23(2) :99–134, 2005.
- [GM07] István Gyöngy and Annie Millet. Rate of convergence of implicit approximations for stochastic evolution equations. In *Stochastic differential equations : theory and applications*, volume 2 of *Interdiscip. Math. Sci.*, pages 281–310. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [GM15] Ludovic Goudenège and Luigi Manca. Asymptotic properties of stochastic Cahn-Hilliard equation with singular nonlinearity and degenerate noise. *Sto. Proc. Appl.*, 125(10) :3785–3800, October 2015.
- [GMV12] Ludovic Goudenège, Daniel Martin, and Grégory Vial. High order finite element calculations for the Cahn-Hilliard equation. *J. Sci. Comput.*, 52(2) :294–321, 2012.
- [GMWZ18] Ludovic Goudenège, Andrea Molent, Xiao Wei, and Antonino Zanette. Fourier-cosine method for pricing and hedging insurance derivatives. *Theoretical Economics Letters*, 8(3) :282–291, February 2018.
- [GMZ16] Ludovic Goudenège, Andrea Molent, and Antonino Zanette. Pricing and Hedging GLWB in the Heston and in the Black-Scholes with Stochastic Interest Rate Models. *Insurance : Mathematics and Economics*, 70 :38–57, September 2016.

- [GMZ18] Ludovic Goudenège, Andrea Molent, and Antonino Zanette. Pricing and Hedging GMWB in the Heston and in the Black-Scholes with Stochastic Interest Rate Models. *Computational Management Science*, pages 1–32, March 2018.
- [GN95] István Gyöngy and David Nualart. Implicit scheme for quasi-linear parabolic partial differential equations perturbed by space-time white noise. *Stochastic Process. Appl.*, 58(1) :57–72, 1995.
- [GN97] István Gyöngy and David Nualart. Implicit scheme for stochastic parabolic partial differential equations driven by space-time white noise. *Potential Anal.*, 7(4) :725–757, 1997.
- [GOS01] Giambattista Giacomin, Stefano Olla, and Herbert Spohn. Equilibrium fluctuations for $\nabla\phi$ interface model. *Ann. Probab.*, 29(3) :1138–1172, 2001.
- [Gou09a] Ludovic Goudenège. *Quelques résultats sur l'équation de Cahn-Hilliard stochastique et déterministe*. Thèse, École Normale Supérieure de Cachan - Antenne de Bretagne, Novembre 2009.
- [Gou09b] Ludovic Goudenège. Stochastic Cahn-Hilliard equation with singular non-linearity and reflection. *Sto. Proc. Appl.*, 119(10) :3516–3548, 2009.
- [Gra93] Christopher P. Grant. Spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 18(3-4) :453–490, 1993.
- [GSŠ16] István Gyöngy, Sotirios Sabanis, and David Šiška. Convergence of tamed Euler schemes for a class of stochastic evolution equations. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.*, 4(2) :225–245, 2016.
- [GW97] P. Glasserman and Y. Wang. Counterexamples in importance sampling for large deviations probabilities. *Ann. Appl. Probab.*, 7(3) :731–746, 1997.
- [Gyö98] István Gyöngy. Lattice approximations for stochastic quasi-linear parabolic partial differential equations driven by space-time white noise. I. *Potential Anal.*, 9(1) :1–25, 1998.
- [Gyö99] István Gyöngy. Lattice approximations for stochastic quasi-linear parabolic partial differential equations driven by space-time white noise. II. *Potential Anal.*, 11(1) :1–37, 1999.
- [GZ15] Ludovic Goudenège and Pierre-André Zitt. A Wright-Fisher model with indirect selection. *J. Math. Biol.*, 71(6-7) :1411–1450, December 2015.
- [Ham70] W. D. Hamilton. Selfish and spiteful behaviour in an evolutionary model. *Nature*, 228(5277) :1218–1220, December 1970.
- [HFL12] Y. Huang, P. A. Forsyth, and G. Labahn. Iterative methods for the solution of a singular control formulation of a gmwb pricing problem. *Numer. Math.*, 122(1) :133–167, September 2012.

- [HH65] J. M. Hammersley and D. C. Handscomb. *Monte Carlo methods*. Methuen & Co., Ltd., London ; Barnes & Noble, Inc., New York, 1965.
- [HitH12] T. Haentjens and K. J. in 't Hout. Alternating direction implicit finite difference schemes for the heston-hull-white partial differential equation. *The Journal of Computation Finance*, 16 :83–110, 2012.
- [HK14] Yao Tung Huang and Yue Kuen Kwok. Analysis of optimal dynamic withdrawal policies in withdrawal guarantee products. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 45 :19–43, 2014.
- [HM06] Martin Hairer and Jonathan C. Mattingly. Ergodicity of the 2D Navier-Stokes equations with degenerate stochastic forcing. *Ann. of Math. (2)*, 164(3) :993–1032, 2006.
- [HM11] Martin Hairer and Jonathan C. Mattingly. A theory of hypoellipticity and unique ergodicity for semilinear stochastic PDEs. *Electron. J. Probab.*, 16 :no. 23, 658–738, 2011.
- [HMMR15] Vanya Horneff, Raimond Maurer, Olivia S. Mitchell, and Ralph Rogalla. Optimal life cycle portfolio choice with variable annuities offering liquidity and investment downside protection. *Insurance : Mathematics and Economics*, 63 :91 – 107, 2015. Special Issue : Longevity Nine - the Ninth International Longevity Risk and Capital Markets Solutions Conference.
- [HRW12] Martin Hairer, Marc D. Ryser, and Hendrik Weber. Triviality of the 2D stochastic Allen-Cahn equation. *Electron. J. Probab.*, 17 :no. 39, 14, 2012.
- [IB95] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. I. The h -version of the FEM. *Comput. Math. Appl.*, 30(9) :9–37, 1995.
- [IB97] Frank Ihlenburg and Ivo Babuška. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. II. The h - p version of the FEM. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(1) :315–358, 1997.
- [Ilm93] T. Ilmanen. Convergence of the allen-cahn equation to brakke's motion by mean curvature. *Journal of Differential Geometry*, 38(2) :416–461, 1993.
- [Inr16] Inria. Logiciel premia. *Equipe-Projet MathRisk*, 2010-2016.
- [Jac06] M. Jacobsen. *Point process theory and applications : marked point and piecewise deterministic processes*. Probability and Its Applications, Birkhäuser, Series, 2006.
- [JDMD06] A.M. Johansen, P. Del Moral, and A. Doucet. Sequential Monte Carlo samplers for rare events. In *Proceedings of the 6th International Workshop on Rare Event Simulation, RESIM 2006, Bamberg*, pages 256–267, 2006.

- [Jen11] Arnulf Jentzen. Higher order pathwise numerical approximations of SPDEs with additive noise. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(2) :642–667, 2011.
- [JK09] Arnulf Jentzen and Peter E. Kloeden. Overcoming the order barrier in the numerical approximation of stochastic partial differential equations with additive space-time noise. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 465(2102) :649–667, 2009.
- [JK11] Arnulf Jentzen and Peter E. Kloeden. *Taylor approximations for stochastic partial differential equations*, volume 83 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2011.
- [JK15] Arnulf Jentzen and R. Kurniawan. Weak convergence rates for euler-type approximations of semilinear stochastic evolution equations with nonlinear diffusion coefficients. *ArXiv e-prints*, 1501.03539, 2015.
- [JKW11] Arnulf Jentzen, Peter Kloeden, and Georg Winkel. Efficient simulation of nonlinear parabolic SPDEs with additive noise. *Ann. Appl. Probab.*, 21(3) :908–950, 2011.
- [JLL⁺16] Darae Jeong, Seunggyu Lee, Dongsun Lee, Jaemin Shin, and Junseok Kim. Comparison study of numerical methods for solving the Allen–Cahn equation. *Computational Materials Science*, 111 :131–136, 2016.
- [JMA09] C. Jiang, Y. Ma, and Y. An. The effectiveness of the var-based portfolio insurance strategy : An empirical analysis. *International Review of Financial Analysis*, 18 :185–197, 2009.
- [KH51] H. Kahn and T. E. Harris. Estimation of particle transmission by random sampling. *National Bureau of Standards*, 12 :27–30, 1951.
- [KLL15a] Mihály Kovács, Stig Larsson, and Fredrik Lindgren. On the backward Euler approximation of the stochastic Allen-Cahn equation. *J. Appl. Probab.*, 52(2) :323–338, 2015.
- [KLL15b] Mihály Kovács, Stig Larsson, and Fredrik Lindgren. On the discretisation in time of the stochastic Allen-Cahn equation. *arXiv preprint arXiv :1510.03684*, 2015.
- [KLM11] Mihály Kovács, Stig Larsson, and A. Mesforush. Finite element approximation of the cahn-hilliard-cook equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49 :2407–2429, 2011.
- [KORVE07] Robert Kohn, Felix Otto, Maria G. Reznikoff, and Eric Vanden-Eijnden. Action minimization and sharp-interface limits for the stochastic Allen-Cahn equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(3) :393–438, 2007.

- [Kou02] S.G. Kou. A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, 48(8) :1086–1101, August 2002.
- [KP92] Peter E. Kloeden and Eckhard Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [KRR14] A. Kling, F. Ruez, and J. Ruß. The impact of stochastic volatility on pricing, hedging, and hedge efficiency of variable annuity guarantees. *European Actuarial Journal*, 4(2) :281–314, 2014.
- [Kru14] Raphael Kruse. *Strong and weak approximation of semilinear stochastic evolution equations*, volume 2093 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2014.
- [KS01] P. E. Kloeden and S. Shott. Linear-implicit strong schemes for Itô-Galerkin approximations of stochastic PDEs. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 14(1) :47–53, 2001. Special issue : Advances in applied stochastic.
- [Lab96] P. E. Labeau. A monte carlo estimation of the marginal distributions in a problem of probabilistic dynamics. *Reliability Engineering & System Safety*, 52(1) :65–75, 1996.
- [Lag06] Agnès Lagnoux. Rare event simulation. *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 20(1) :45–66, 2006.
- [Lan71] J. S. Langer. Theory of spinodal decomposition in alloys. *Annals of Physics*, 65 :53–86, 1971.
- [Les05] Sabin Lessard. Long-term stability from fixation probabilities in finite populations : New perspectives for ESS theory. *Theoret. Popul. Biology*, 68(1) :19–27, 2005.
- [LL15] Hyun Geun Lee and June-Yub Lee. A second order operator splitting method for Allen–Cahn type equations with nonlinear source terms. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 432 :24–34, 2015.
- [LM11] Stig Larsson and A. Mesforush. Finite element approximation of the linearized cahn-hilliard-cook equation. *IMA J. Numer. Anal.*, 31 :1315–1333, 2011.
- [LMRZ11] W. Lair, Sophie Mercier, Michel Roussignol, and R. Ziani. Piecewise deterministic Markov processes and maintenance modelling : application to maintenance of a train air conditioning system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, 225(2) :199–209, 2011.
- [LPS14] Gabriel J. Lord, Catherine E. Powell, and Tony Shardlow. *An introduction to computational stochastic PDEs*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, New York, 2014.

- [LS98] Pierre-Louis Lions and Panagiotis E. Souganidis. Fully nonlinear stochastic partial differential equations : non-smooth equations and applications. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 327(8) :735–741, 1998.
- [LT13] Gabriel J. Lord and Antoine Tambue. Stochastic exponential integrators for the finite element discretization of SPDEs for multiplicative and additive noise. *IMA J. Numer. Anal.*, 33(2) :515–543, 2013.
- [LWW16] X. Sheldon Lin, Panpan Wu, and Xiao Wang. Move-based hedging of variable annuities : A semi-analytic approach. *Insurance : Mathematics and Economics*, 71 :40 – 49, 2016.
- [Mar08] Daniel Martin. The finite element library Mélina. <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina>, 2008.
- [Mer71] R.C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3 :373–413, 1971.
- [Mil95] G. N. Milstein. *Numerical integration of stochastic differential equations*, volume 313 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995. Translated and revised from the 1988 Russian original.
- [MPW98] Stanislaus Maier-Paape and Thomas Wanner. Spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard equation in higher dimensions. I. Probability and wavelength estimate. *Comm. Math. Phys.*, 195(2) :435–464, 1998.
- [MPW00] Stanislaus Maier-Paape and Thomas Wanner. Spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard equation in higher dimensions : nonlinear dynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 151(3) :187–219, 2000.
- [MS06] M. A. Milevsky and T. S. Salisbury. Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits. *Insurance : Mathematics and Economics*, 38 :21–38, 2006.
- [MT05] G. N. Milstein and M. V. Tretyakov. Numerical integration of stochastic differential equations with nonglobally Lipschitz coefficients. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(3) :1139–1154, 2005.
- [MW07] A. J. McKane and D. Waxman. Singular solutions of the diffusion equation of population genetics. *J. Theoret. Biol.*, 247(4) :849–858, 2007.
- [MZ96] M. Marseguerra and E. Zio. Monte carlo approach to psa for dynamic process systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 52(3) :227–241, 1996.
- [NC98] A. Novick-Cohen. The Cahn-Hilliard equation : mathematical and modeling perspectives. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 8(2) :965–985, 1998.

- [NCS84] Amy Novick-Cohen and Lee A. Segel. Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation. *Phys. D*, 10(3) :277–298, 1984.
- [NP92] D. Nualart and Étienne Pardoux. White noise driven quasilinear SPDEs with reflection. *Probab. Theory Related Fields*, 93(1) :77–89, 1992.
- [NR90] Daniel B. Nelson and Krishna Ramaswamy. Simple binomial processes as diffusion approximations in financial models. *Review of Financial Studies*, 3(3) :393–430, 1990.
- [Oda07] Cyril Odasso. Exponential mixing for the 3D stochastic Navier-Stokes equations. *Comm. Math. Phys.*, 270(1) :109–139, 2007.
- [Ost13] V. Ostrovski. Efficient and exact simulation of the hull-white model. Available at SSRN : <http://ssrn.com/abstract=2304848> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2304848>, 2013.
- [Oto06] Yoshiki Otobe. Stochastic partial differential equations with two reflecting walls. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 13(2) :129–144, 2006.
- [Per86] F. Perold. Constant portfolio insurance. *Harvard Business School*, 1986.
- [Péz11] Jacques Pézier. Rationalization of investment preference criteria. *ICMA Centre Discussion Papers in Finance*, 2011.
- [PLK12] Jingjiang Peng, Kwai Sun Leung, and Yue Kuen Kwok. Pricing guaranteed minimum withdrawal benefits under stochastic interest rates. *Quantitative Finance*, 12(6) :933–941, 2012.
- [Pon17] Romain Poncet. *Méthodes numériques pour la simulation d'équations aux dérivées partielles stochastiques non-linéaires en condensation de Bose-Einstein*. PhD thesis, Ecole Doctorale de Mathématique Hadamard, 2017.
- [Pri01] Jacques Printems. On the discretization in time of parabolic stochastic partial differential equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 35(6) :1055–1078, 2001.
- [RBS16] Joran Rolland, Freddy Bouchet, and Eric Simonnet. Computing transition rates for the 1-d stochastic Ginzburg–Landau–Allen–Cahn equation for finite-amplitude noise with a rare event algorithm. *Journal of Statistical Physics*, 162(2) :277–311, 2016.
- [Ric96] W. R. Rice. Sexually antagonistic male adaptation triggered by experimental arrest of female evolution. *Nature*, 381(6579) :232–234, May 1996.
- [RPSWT09] Preethi Radhakrishnan, Diana Pérez-Staples, Christopher W. Weldon, and Phillip W. Taylor. Multiple mating and sperm depletion in male queensland fruit flies : effects on female remating behaviour. *Animal Behaviour*, 78(4) :839–846, October 2009.

- [RR55] M.N. Rosenbluth and A.W. Rosenbluth. Monte carlo calculation of the average extension of molecular chains. *J. of Chem. Phys.*, 23(2) :356–359, 1955.
- [RS15] J. Rolland and E. Simonnet. Statistical behaviour of adaptive multilevel splitting algorithms in simple models. *Journal of Computational Physics*, 283 :541 – 558, 2015.
- [RT09] G. Rubino and B. Tuffin. Introduction to rare event simulation. In *Rare event simulation using Monte Carlo methods*, pages 1–13. Wiley, Chichester, 2009.
- [RY91] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Shp07] M. Shpak. Selection against demographic stochasticity in age-structured populations. *Genetics*, 177(4) :2181–2194, Dec 2007.
- [SHR08] Sven Steiner, Nina Henrich, and Joachim Ruther. Mating with sperm-depleted males does not increase female mating frequency in the parasitoid *Lariophagus distinguendus*. *Entomologia Experimentalis et Applicata*, 126(2) :131–137, February 2008.
- [Sim14] E. Simonnet. Combinatorial analysis of the adaptive last particle method. *Statistics and Computing*, pages 1–20, 2014.
- [Ski06] J. Skilling. Nested sampling for general Bayesian computation. *Bayesian Anal.*, 1(4) :833–859 (electronic), 2006.
- [SS89] E. P. Stephan and M. Suri. On the convergence of the p -version of the boundary element Galerkin method. *Math. Comp.*, 52(185) :31–48, 1989.
- [Str68] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5 :506–517, 1968.
- [SW99] Evelyn Sander and Thomas Wanner. Monte Carlo simulations for spinodal decomposition. *J. Statist. Phys.*, 95(5-6) :925–948, 1999.
- [SW00] Evelyn Sander and Thomas Wanner. Unexpectedly linear behavior for the Cahn-Hilliard equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 60(6) :2182–2202 (electronic), 2000.
- [Tan10] Peter Tankov. Pricing and hedging gap risk. *Journal of Computational Finance*, 13(3) :33–59, 2010.
- [Tay09] J. E. Taylor. The genealogical consequences of fecundity variance polymorphism. *Genetics*, 182(3) :813–837, Jul 2009.

- [VAVA91] M. Villén-Altamirano and J. Villén-Altamirano. RESTART : A method for accelerating rare events simulations. In *Proceeding of the thirteenth International Teletraffic Congress*, volume Copenhagen, Denmark, June 19-26 of *Queueing, performance and control in ATM : ITC-13 workshops*, pages 71–76. North-Holland, Amsterdam-New York, 1991.
- [VEW12] Eric Vanden-Eijnden and Jonathan Weare. Rare event simulation of small noise diffusions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 65(12) :1770–1803, 2012.
- [VF14] K. Vetzal and P. Forsyth. An optimal stochastic control framework for determining the cost of hedging of variable annuities. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 44 :29–53, 2014.
- [Wal14] C. Walter. Moving particles : a parallel optimal multilevel splitting method with applications in quantiles estimation and meta-model-based algorithms. *Preprint*, 2014.
- [Wan04] Thomas Wanner. Maximum norms of random sums and transient pattern formation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(6) :2251–2279 (electronic), 2004.
- [Wan17] Xiaojie Wang. Strong convergence rates of the linear implicit Euler method for the finite element discretization of SPDEs with additive noise. *IMA J. Numer. Anal.*, 37(2) :965–984, 2017.
- [Wax11] D. Waxman. Comparison and content of the Wright-Fisher model of random genetic drift, the diffusion approximation, and an intermediate model. *J. Theoret. Biol.*, 269 :79–87, 2011.
- [Web10a] Hendrik Weber. On the short time asymptotic of the stochastic Allen-Cahn equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(4) :965–975, 2010.
- [Web10b] Hendrik Weber. Sharp interface limit for invariant measures of a stochastic Allen-Cahn equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 63(8) :1071–1109, 2010.
- [WG13] Xiaojie Wang and Siqing Gan. Weak convergence analysis of the linear implicit Euler method for semilinear stochastic partial differential equations with additive noise. *J. Math. Anal. Appl.*, 398(1) :151–169, 2013.
- [WOW13] Hendrik Weber, Felix Otto, and Maria G. Westdickenberg. Invariant measure of the stochastic allen-cahn equation : the regime of small noise and large system size. *arXiv preprint arXiv :1301.0408*, 2013.
- [XLI18] XLIFE++. Bibliothèque c++ de calcul éléments finis. <https://uma.ensta-paristech.fr/soft/XLiFE++/>, 2018.
- [YD13] Sharon S. Yang and Tian-Shyr Dai. A flexible tree for evaluating guaranteed minimum withdrawal benefits under deferred life annuity contracts with various provisions. *Insurance : Mathematics and Economics*, 52(2) :231 – 242, 2013.

- [Yip98] Nung Kwan Yip. Stochastic motion by mean curvature. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 144(4) :313–355, 1998.
- [Yos90] H. Yoshida. Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, 150(5) :262–268, 1990.
- [Zam02] Lorenzo Zambotti. Integration by parts formulae on convex sets of paths and applications to SPDEs with reflection. *Probab. Theory Related Fields*, 123(4) :579–600, 2002.
- [Zam03] Lorenzo Zambotti. Integration by parts on δ -Bessel bridges, $\delta > 3$ and related SPDEs. *Ann. Probab.*, 31(1) :323–348, 2003.
- [Zam04] Lorenzo Zambotti. Fluctuations for a $\nabla\phi$ interface model with repulsion from a wall. *Probab. Theory Related Fields*, 129(3) :315–339, 2004.
- [ZDDG08] H. Zhang, F. Dufour, Y. Dutoit, and K. Gonzalez. Piecewise deterministic Markov processes and dynamic reliability. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, 222(4) :545–551, 2008.